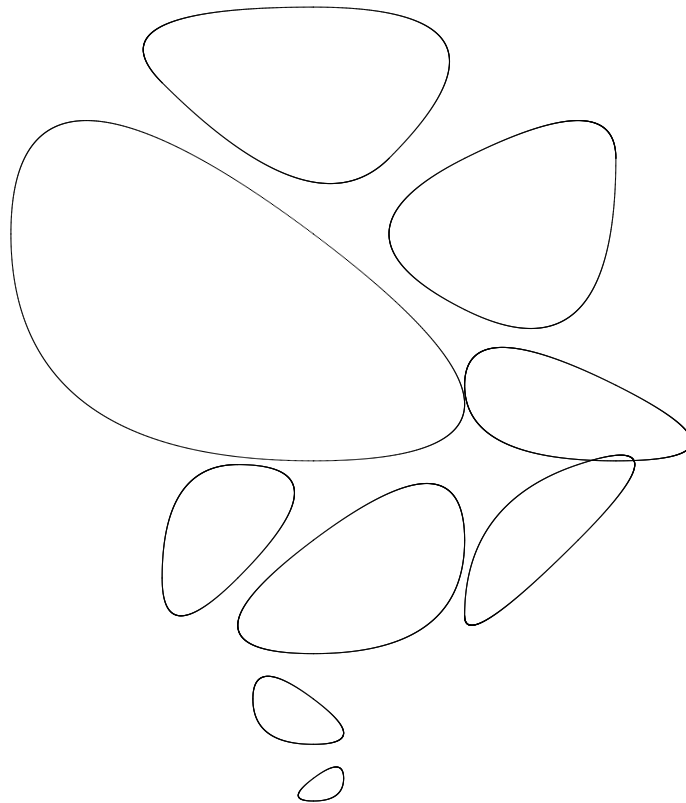


L'inversion du filtre de Hodrick-Prescott

Robert Milano, Institut National de Statistiques, Belgique
robert.milano@economie.fgov.be

Résumé

Le filtre de Hodrick-Prescott est inversé dans le cas de séries chronologiques infinies. Plus précisément, ce filtre est converti en un opérateur linéaire, à savoir une moyenne mobile infinie. On montre que cette moyenne est invariante, symétrique et normée. Cette inversion recourt à la théorie des équations différentielles discrètes. La moyenne mobile obtenue permet, via les *séries de Fourier*, d'étudier les propriétés asymptotiques du filtre *HP*, notamment l'impact de ce filtre sur les différentes fréquences (cycles) composant une série initiale. Cependant, pour une série chronologique finie, le filtre *HP* équivaut à une moyenne mobile non invariante dont l'asymétrie s'accroît au fur et à mesure que l'on s'approche des extrémités de la série. Cette asymétrie induit des déphasages dont l'importance est fonction de la fréquence des différentes composantes de la série initiale. Ce qui entraîne des distorsions dans la série filtrée. Pour une fréquence donnée, on quantifie ces déphasages au niveau de l'observation la plus récente, comparant là l'action du filtre *HP* pour cette série finie (périodique) à son action dans le cas où la série (périodique) aurait été infinie.



L'inversion du filtre de Hodrick-Prescott dans le cas de séries infinies

Table des matières

1	Introduction	3
2	Une base vectorielle pour séries finies et infinies	4
2.1	L'espace de Hilbert \mathcal{S}_∞	4
2.2	Discrete Fourier Transform [DFT]	6
3	Le filtre de Hodrick-Prescott dans le cas de séries infinies	8
3.1	Définition du filtre de Hodrick-Prescott	8
3.2	Le filtre de Hodrick-Prescott est <i>mathématiquement</i> inversible	10
3.3	Inversion du filtre de Hodrick-Prescott par la méthode des <i>équations aux différences</i>	13
3.4	Périodogramme de la moyenne mobile	25
4	Le filtre <i>HP</i> dans le cas de séries chronologiques finies	29
4.1	Définition du filtre <i>HP</i> dans le cas d'une série finie	29
4.2	Périodogramme du filtre <i>HP</i> à l'extrémité d'une série finie	34
5	Conclusion	36
6	Références	37
7	Annexes	37

1 Introduction

Le filtre de Hodrick-Prescott est un filtre couramment utilisé dans l'étude des séries chronologiques d'origine économique. La simplicité de sa définition ainsi que celle de sa mise en oeuvre y sont certainement pour quelque chose. Ce filtre a pour objectif de dégager un trend d'une série donnée.

Etudier les propriétés du filtre *HP* peut se faire sous divers angles. L'un d'eux, via les séries de Fourier, se propose d'analyser l'impact du filtre *HP* sur les différentes fréquences composant une série initiale.

La définition traditionnelle du filtre *HP* – une optimisation à caractère global – le rend peu maniable pour une étude fréquentielle. D'où l'idée de traduire ce filtre dans un formalisme plus adapté à cet objectif. Plus précisément, ce filtre sera transformé en une moyenne mobile.

Dans une première étape, on s'intéresse aux séries infinies. Dans ce cas, cette transformation peut être réalisée par le recours à la théorie des équations différentielles discrètes (*difference equations*). On peut en effet montrer que le filtre *HP* se ramène à une équation aux différences d'ordre 4, elle-même se ramenant, via un changement de notation utilisant des expressions matricielles, à un système de quatre équations aux différences d'ordre 1. La moyenne mobile ainsi obtenue est invariante, symétrique et normée, ceci toujours dans le cas des séries infinies.

Une fois converti sous forme de moyenne mobile, les effets du filtre *HP* peuvent être radiographiés à l'aide du formalisme des *séries de Fourier*, la série initiale étant alors décomposée selon une combinaison linéaire de fonctions périodiques. Un point essentiel est que ces fonctions circulaires sont des vecteurs propres pour les opérateurs linéaires, notamment le filtre *HP*. On peut dès lors dégager les valeurs propres de ce filtre pour les différentes fréquences constituant une série initiale. La norme de ces valeurs propres (éventuellement imaginaires) livre le périodogramme du filtre, outil précieux pour étudier – au niveau fréquentiel – l'impact d'un filtre sur une série donnée. L'angle de ces valeurs propres livre le déphasage induit par le filtre. Dans le cas d'une série infinie, ce déphasage est évidemment nul.

Le cas d'une série finie n'admet pas une solution analytique compacte. Inverser le filtre *HP* exige ici que l'on tienne compte des contraintes que représentent les extrémités de la série, ce qui débouche sur un système de cinq équations aux différences distinctes, à savoir une équation aux différences d'ordre 4 additionnée de deux équations d'ordre 3 et de deux équations d'ordre 2, celles-ci exprimant les conditions aux limites de la série initiale. Ces conditions brisent la symétrie et l'invariance du filtre. Résoudre un tel système est trop complexe. C'est pourquoi les solutions seront approchées numériquement. La solution obtenue est une moyenne mobile non invariante et non symétrique, cette dernière caractéristique s'aggravant au fur et à mesure que l'on se rapproche des extrémités de la série (on peut éventuellement prolonger la série pour limiter les effets dus aux révisions, mais ceci n'est pas l'objet de cette note). Cependant, 'loin' des extrémités de la série, les moyennes obtenues sont 'proches' de celle établie dans le cas infini. Ces distances seront précisées.

La moyenne mobile étant non invariante dans le cas des séries finies, on s'intéressera tout particulièrement à la moyenne appliquée à la dernière observation de la série initiale. Cette moyenne asymétrique induit un déphasage dont l'amplitude – donné par l'angle des valeurs propres de cette moyenne – est fonction de la longueur de la série et de la fréquence analysée (parmi les fréquences composant la série initiale).

On voit donc que non seulement le paramètre λ joue un rôle crucial dans le com-

portement du filtre *HP*, mais aussi la longueur de la série filtrée.

Pour une fréquence donnée, on tâchera de mesurer les distorsions du filtre *HP* en la dernière observation d'une série finie (périodique), comparant l'effet de ce filtre *HP* à son effet lorsque cette même série (périodique) est infinie.

Nous ne discuterons pas dans cette note le fait de prolonger la série pour pallier ce problème aux limites.

Les séries que nous – Institut National de Statistiques belge – sommes amenés à étudier sont principalement des séries trimestrielles. C'est la raison pour laquelle le paramètre λ pris en exemple dans les simulations numériques est souvent égal à 1600, valeur usuellement recommandée en pareil cas. Les valeurs $\lambda = 100$ et $\lambda \sim 15000$ étant recommandées pour les séries annuelles et mensuelles respectivement. Ceci dit, discuter la valeur de λ n'est pas l'objet de ce document.

2 Une base vectorielle pour séries finies et infinies

2.1 L'espace de Hilbert \mathcal{S}_∞

On se place ici dans le cas idéal où la série comporte une infinité d'observations. Cette série est vue comme l'une des réalisations possibles d'un processus aléatoire, livrant un vecteur aux composantes connues et fixées. Nous verrons – lors de calculs concrets explicités ultérieurement dans ces notes – qu'il est avantageux de considérer les séries chronologiques réelles comme étant un cas particulier des séries complexes.

L'ensemble \mathcal{S}_∞ des séries temporelles complexes infinies (ou *séries chronologiques infinies*) est l'ensemble des suites ordonnées par l'ensemble d'indices \mathbb{Z} :

$$\mathbf{X}_\mathbb{Z} = (\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = [x_k]_{k \in \mathbb{Z}} = [x_k],$$

où $\|x_k\| < \infty \forall k$. Les indices k représentent souvent un compteur chronométrique. L'ensemble \mathcal{S}_∞ , muni de la somme et du produit extérieur suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\mathbb{Z} + \mathbf{Y}_\mathbb{Z} &= [x_k + y_k] \quad \forall \mathbf{X}_\mathbb{Z}, \mathbf{Y}_\mathbb{Z} \in \mathcal{S}_\infty \\ c\mathbf{X}_\mathbb{Z} &= [cx_k] \quad \forall c \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

a une structure d'espace vectoriel $(\mathcal{S}_\infty, +, \cdot)$ dont les éléments $\mathbf{X}_\mathbb{Z}$ seront dénommés *vecteurs*. L'espace vectoriel \mathcal{S}_∞ est muni d'un produit scalaire :

$$\langle \mathbf{X}_\mathbb{Z} | \mathbf{Y}_\mathbb{Z} \rangle = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell \bar{y}_\ell,$$

où \bar{y}_ℓ est le complexe conjugué de y_ℓ . Ce produit scalaire ne converge pas forcément. Un sous-espace vectoriel important de \mathcal{S}_∞ est ℓ^2 , comprenant les seuls vecteurs $\mathbf{X}_\mathbb{Z}$ ayant une norme finie :

$$\langle \mathbf{X}_\mathbb{Z} | \mathbf{X}_\mathbb{Z} \rangle = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \|x_\ell\|^2 = \|\mathbf{X}_\mathbb{Z}\|^2 < \infty.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs de norme finie est convergent. Les séries finies, celles dont seul un nombre fini de composantes diffèrent de 0, appartiennent au sous-vectoriel ℓ^2 . Dorénavant, toutes les séries chronologiques envisagées dans la suite appartiendront, sauf mention du contraire, au sous-vectoriel ℓ^2 . Cette restriction a deux

conséquences :

- (i) $x_k \rightarrow 0$ lorsque $|k| \rightarrow \infty$.
- (ii) La série $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}$ est uniformément bornée : $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ : \|x_k\| < M \forall k$.

Par la suite, on recourra régulièrement à ces deux propriétés.

2.1.1 Opérateurs *LTIO*

Soit un opérateur \mathfrak{L} agissant sur le vecteur $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}_{\infty} : \mathfrak{L}\mathbf{X}_{\mathbb{Z}} = [\mathfrak{L}_k x_k]$. L'indice k apparaissant dans la notation \mathfrak{L}_k indique que le calcul effectif de cet opérateur pourrait dépendre de la valeur k indiquant l'élément x_k de la série initiale $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}$.

Définition 2.1.1. Soit la série $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}_{\infty}$. L'opérateur \mathfrak{L} est dit *LTIO* (*Linear Time Invariant Operator*) s'il vérifie les conditions suivantes :

$$(i) \quad \mathfrak{L}_k x_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_{\ell \cdot k} \cdot x_{k+\ell} \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) \quad \mathfrak{L}_{k+s} x_{k+s} = \mathfrak{L}_k x_{k+s} \quad \forall k, s \in \mathbb{Z}.$$

La condition (ii) revient à considérer que les poids $p_{\ell \cdot k}$ intervenant dans (i) vérifient $p_{\ell \cdot k} = p_{\ell}(k') \forall \ell, k, k' \in \mathbb{Z}$. C'est pourquoi, dans le cas d'opérateurs *LTIO*, la notation de ces poids se simplifie en $p_{\ell \cdot k} = p_{\ell}$. De même, on simplifiera : $\mathfrak{L}\mathbf{X}_{\mathbb{Z}} = [\mathfrak{L}x_k]$. On écrira donc : $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_{\ell} x_{k+\ell} = \mathfrak{L}x_k$.

2.1.2 Un ensemble de vecteurs propres

Considérons les séries chronologiques particulières (fonctions de ω) :

$$\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{(\omega)} = (\dots, e^{-i3\omega}, e^{-i2\omega}, e^{-i\omega}, 1, e^{i\omega}, e^{i2\omega}, e^{i3\omega}, \dots) = [e^{ik\omega}],$$

où $\omega \in \mathbb{R}$. Ces séries particulières sont telles que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{(\omega)} &= [\mathfrak{L}e^{ik\omega}] \\ &= \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_{\ell} e^{i(k+\ell)\omega} \right] \\ &= \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_{\ell} e^{i\omega\ell} \right) \cdot [e^{ik\omega}] \\ &= E_{\omega} \cdot \mathbf{B}_{\mathbb{Z}}^{(\omega)}, \end{aligned}$$

où $E_{\omega} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} p_t e^{i\omega t}$ est la valeur propre de l'opérateur \mathfrak{L} pour la fréquence ω . Ainsi, dans le cas discret, l'opérateur \mathfrak{L} admet un ensemble infini de vecteurs propres $\{[e^{i\omega k}], \omega \in \mathbb{R}\}$ de norme non finie.

Définition 2.1.2. On appelle *périodogramme* la fonction réelle $\|E_{\omega}\|^2$. Pour un série réelle, le périodogramme est une fonction paire de ω .

2.2 Discrete Fourier Transform [DFT]

La réalité socio-économique nous amène surtout à traiter des séries chronologiques finies. Soit le sous-espace vectoriel \mathcal{S}_T de \mathcal{S}_∞ composé des séries complexes $[x_k]_T$ dont les composantes sont nulles en dehors de l'ensemble fini d'indices $k \in \{-T, -T+1, \dots, T\}$. Ce sous-espace vectoriel \mathcal{S}_T de dimension $2T+1$ est en fait isomorphe à l'espace vectoriel \mathbb{C}^{2T+1} . Si $\mathbf{X}_T \in \mathcal{S}_T$, on a :

$$\mathbf{X}_T = (x_{-T}, x_{-T+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_T) = [x_k]_{k=-T}^T = [x_k]_T.$$

Définition 2.2.1. Sur l'ensemble \mathcal{S}_T , le *produit scalaire* de deux séries chronologiques \mathbf{X}_T et \mathbf{Y}_T est une application qui à ces deux vecteurs associe un complexe comme suit :

$$\langle \mathbf{X}_T | \mathbf{Y}_T \rangle = \sum_{t=-T}^T x_t \bar{y}_t,$$

où \bar{y}_t est le complexe conjugué de y_t .

Propriété 2.2.1.

$$\langle \mathbf{Y}_T | \mathbf{X}_T \rangle = \sum_{t=-T}^T y_t \bar{x}_t = \sum_{t=-T}^T \overline{\bar{y}_t x_t} = \overline{\sum_{t=-T}^T x_t \bar{y}_t} = \overline{\langle \mathbf{X}_T | \mathbf{Y}_T \rangle}.$$

Propriété 2.2.2. L'ensemble des vecteurs périodiques de \mathcal{S}_T

$$\left\{ \mathbf{B}_T^{(n)} \right\}_{n=-T}^T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2T+1}} (e^{-inT\alpha}, e^{-in(T-1)\alpha}, \dots, e^{-in\alpha}, 1, e^{in\alpha}, \dots, e^{inT\alpha}) \right\}_{n=-T}^T,$$

où $\alpha = 2\pi/(2T+1)$, constitue un système orthonormé de \mathcal{S}_T . En effet, pour $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}_T^{(n)} | \mathbf{B}_T^{(m)} \rangle &= \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^T e^{i(n-m)t\alpha} \\ &= \frac{e^{-iT(n-m)\alpha} [1 - e^{i(2T+1)\alpha(n-m)}]}{(2T+1) [1 - e^{i(n-m)\alpha}]} \\ &= \frac{e^{-iT(n-m)\alpha} [1 - e^{i2\pi(n-m)}]}{(2T+1) [1 - e^{i(n-m)\alpha}]} \\ &= 0, \end{aligned}$$

tenant compte du fait que $n-m \in \mathbb{Z}$. Notons que les vecteurs $\mathbf{B}_T^{(n)}$ de ce système sont périodiques en l'indice n , de période $2T+1$. Pour $n=m$, on a :

$$\langle \mathbf{B}_T^{(n)} | \mathbf{B}_T^{(n)} \rangle = \frac{2T+1}{2T+1} = 1.$$

Ainsi, les éléments α et $1/\sqrt{2T+1}$ n'ont pour autre but que celui de normaliser l'ensemble des vecteurs $\{(e^{-inT}, e^{-in(T-1)}, \dots, e^{-in}, 1, e^{in}, \dots, e^{inT}) ; n \in \mathbb{Z}\}$, qui ne sont autres que les vecteurs propres tronqués de l'opérateur \mathcal{L} , vecteurs propres obtenus dans le cas des séries chronologiques infinies. Résumant, pour $n, m \in [-T, T]$:

$$\langle \mathbf{B}_T^{(n)} | \mathbf{B}_T^{(m)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

L'ensemble des $2T+1$ vecteurs orthonormés $\{\mathbf{B}_T^{(n)}; n \in \{-T, \dots, T\}\}$ constitue donc une base de vecteurs propres de l'espace vectoriel \mathcal{S}_T à $2T+1$ dimensions. Autrement dit, les vecteurs \mathbf{X}_T définis sur $[-T, -T+1, \dots, T]$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_T &= \sum_{n=-T}^T \langle \mathbf{X}_T | \mathbf{B}_T^{(n)} \rangle \mathbf{B}_T^{(n)} \\ &= \sum_{n=-T}^T c_n \mathbf{B}_T^{(n)},\end{aligned}$$

où on a posé $c_n = \langle \mathbf{X}_T | \mathbf{B}_T^{(n)} \rangle$. Une décomposition du vecteur $\mathbf{X}_T = [x_k]_{k=-T}^T$ dans une telle base renvoie à la théorie relative aux *DFT* : *Discrete Fourier Transform* :

$$\begin{aligned}x_k &= \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T c_n e^{ink\alpha} \\ c_n &= \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{k=-T}^T x_k e^{-ink\alpha}.\end{aligned}$$

Définition 2.2.2. Les coordonnées complexes c_n du vecteur \mathbf{X}_T dans l'espace vectoriel $(\mathbb{C}^{2T+1}, \mathbf{B}_T^{(n)})$ muni de la base $\{\mathbf{B}_T^{(n)}; n = -T, \dots, T\}$ sont les *coefficients de Fourier* de la série chronologique \mathbf{X}_T . Les nombres complexes x_k sont les *composantes* de la série \mathbf{X}_T dans l'espace vectoriel $(\mathbb{C}^{2T+1}, \mathbf{H}_T^{(n)})$ muni de la base $\{\mathbf{H}_T^{(n)}; n = -T, \dots, T\}$, où $\mathbf{H}_T^{(n)} = (0_{(-T)}, \dots, 0_{(n-1)}, 1_{(n)}, 0_{(n+1)}, \dots, 0_{(T)})$.

2.2.1 Le périodogramme

Pour une série finie \mathbf{X}_T , l'opérateur linéaire \mathcal{L} ne peut être *LTIO*. Il sera donc noté \mathcal{L}_k , pour indiquer qu'il est fonction de l'indice k . Soit x_k une composante de \mathbf{X}_T et soit $\mathcal{L}_k x_k = \sum_{\ell=-T-k}^{T-k} p_{\ell,k} x_{k+\ell}$ l'opérateur calculé en x_k . On peut montrer que chacun des $2T+1$ vecteurs de la base $\{\mathbf{B}_T^{(n)}\}_{n=-T}^T$ est un vecteur propre de \mathcal{L}_k , dont la valeur propre correspondante $E_{n,k}$ est une valeur éventuellement complexe. On a ainsi :

$$\mathcal{L}_k x_k = \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T c_n \mathcal{L}_k e^{ink\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T c_n E_{n,k} e^{ink\alpha}.$$

Définition 2.2.3. Le *périodogramme* de la série \mathbf{X}_T en x_k est la fonction réelle $\|E_{n,k}\|^2$ des indices $n \in \{-T, \dots, T\}$.

Cette norme joue un rôle essentiel dans l'étude des séries chronologiques. Pour une série réelle, le périodogramme est une fonction paire des indices $n \in \{-T, \dots, T\}$. On peut démontrer que les $2T+1$ valeurs propres $E_{n,k}$ de \mathcal{L}_k sont, en x_k , données par :

$$E_{n,k} = \sum_{\ell=-T-k}^{T-k} p_{\ell,k} e^{in\ell\alpha}$$

où $\alpha = 2\pi/(2T+1)$ et où les valeurs propres $E_{n,k}$ dépendent de n et k .

3 Le filtre de Hodrick-Prescott dans le cas de séries infinies

3.1 Définition du filtre de Hodrick-Prescott

Le filtre de Hodrick-Prescott de paramètre λ – noté $HP(\lambda)$ –, est une application de $\ell^2 \subset \mathcal{S}_\infty$ dans $\ell^2 \subset \mathcal{S}_\infty$ qui à une série chronologique $\mathbf{X}_Z \in \ell^2$ associe l'unique série \mathbf{Y}_Z minimisant l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{Y}_Z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ (x_k - y_k)^2 + \lambda [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})]^2 \} \\ & = \min_{\mathbf{Y}_Z} \|\mathbf{X}_Z - \mathbf{Y}_Z\|^2 + \lambda \|\nabla^2 \mathbf{Y}_Z\|^2, \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre réel pondérant l'importance du second terme, terme assimilable à une dérivée seconde discrète. Autrement dit, le paramètre λ – choisi a priori par l'"économiste" – pondère l'importance accordée au caractère "lisse" de la série \mathbf{Y}_Z . Pour $\lambda = \infty$, la série \mathbf{Y}_Z est une droite ; pour $\lambda = 0$, on obtiendrait $\mathbf{Y}_Z = \mathbf{Z}_Z$.

La série \mathbf{Y}_Z minimisant l'expression précédente est solution du système d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_k} \|\mathbf{X}_Z - \tilde{\mathbf{Y}}_Z\|^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_k} \|\nabla^2 \tilde{\mathbf{Y}}_Z\|^2 = 0; \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Pour un $k = q$ fixé, l'équation associée est :

$$\frac{\partial}{\partial y_q} (x_q - y_q)^2 + \lambda \sum_{i=0}^2 \frac{\partial}{\partial y_q} (y_{q+i} - 2y_{q+i-1} + y_{q+i-2})^2 = 0,$$

ce qui livre l'**équation aux différences** :

$$\lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q = x_q, \quad (\text{ENH})$$

Equation référencée par la suite sous l'appellation d'*Equation Non Homogène* (ENH). La suite de cette note a pour objectif de résoudre cette équation d'ordre 4, c'est-à-dire d'inverser le filtre *HP*.

3.1.1 Le polynôme caractéristique de l'équation aux différences

Pour un $k = q$ fixé, nous aimerions ici exprimer l'élément y_q de la série filtrée en fonction des éléments $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \dots$ de la série chronologique initiale, nous ramenant ainsi à une formulation de type *moyenne mobile*. Si on définit le *Lag operator* L comme suit :

$$Ly_k = y_{k-1} \quad L^n y_k = L(L^{n-1} y_k),$$

alors l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} x_q &= \lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q \\ &= [\lambda(L^{-2} - 4L^{-1} + 6 - 4L + L^2) + 1] y_q \\ &= [\lambda L^4 - 4\lambda L^3 + (6\lambda + 1)L^2 - 4\lambda L + \lambda] y_{q+2}, \end{aligned}$$

tenant compte du fait que $L^{-1}y_k = y_{k+1}$ et $L^{-n}y_k = L^{-1}(L^{-n+1})y_k$. On peut écrire :

$$x_{q-2} = [\lambda L^4 - 4\lambda L^3 + (6\lambda + 1)L^2 - 4\lambda L + \lambda] y_q,$$

ce dernier opérateur ayant pour polynôme caractéristique

$$\lambda z^4 - 4\lambda z^3 + (6\lambda + 1)z^2 - 4\lambda z + \lambda = 0,$$

dont les quatre racines complexes z_1, z_2, z_3, z_4 ont – sachant que $\lambda > 0$ – pour parties réelles et imaginaires les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Re(z_1) = \Re(z_2) &= 1 - \frac{\sqrt{\sqrt{16\lambda + 1} - 1}}{2\sqrt{2\lambda}}; & \Im(z_2) = -\Im(z_1) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{\sqrt{16\lambda + 1} + 1}}{2\sqrt{2\lambda}}; \\ \Re(z_3) = \Re(z_4) &= 1 + \frac{\sqrt{\sqrt{16\lambda + 1} - 1}}{2\sqrt{2\lambda}}; & \Im(z_4) = -\Im(z_3) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\sqrt{16\lambda + 1} + 1}}{2\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned}$$

On peut réécrire les solutions du polynôme caractéristique sous la forme

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad z_2 = \rho_1 e^{-i\theta_1} \quad z_3 = \rho_2 e^{i\theta_2} \quad z_4 = \rho_2 e^{-i\theta_2},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\Im^2(z_1) + \Re^2(z_1)} = \sqrt{\Im^2(z_2) + \Re^2(z_2)} \\ \rho_2 &= \sqrt{\Im^2(z_3) + \Re^2(z_3)} = \sqrt{\Im^2(z_4) + \Re^2(z_4)} \\ \theta_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{\Im(z_1)}{\Re(z_1)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\Im(z_2)}{\Re(z_2)} \right) \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{\Im(z_3)}{\Re(z_3)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\Im(z_4)}{\Re(z_4)} \right). \end{aligned}$$

Etudions quelques propriétés des racines du polynôme caractéristique. Posant l'égalité

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_4 (x - z_4)(x - z_3)(x - z_2)(x - z_1)$$

et distribuant la dernière expression, on établit

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a_3/a_4 = 4\lambda/\lambda = 4 \quad (1)$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = a_2/a_4 = (6\lambda + 1)/\lambda \quad (2)$$

$$z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 = -a_1/a_4 = 4\lambda/\lambda = 4 \quad (3)$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = a_0/a_4 = \lambda/\lambda = 1. \quad (4)$$

L'identité (4) livre $\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_1 e^{-i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} \rho_2 e^{-i\theta_2} = \rho_1^2 \rho_2^2 = 1$, impliquant $\rho_1 \rho_2 = 1$. Dès lors, on notera $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = \rho^{-1}$. Les identités (1) et (3), sachant (4), donnent l'égalité $\rho \cos \theta_1 + \rho^{-1} \cos \theta_2 = \rho \cos \theta_2 + \rho^{-1} \cos \theta_1$, entraînant $\theta_1 = \pm \theta_2$. Ces égalités permettent d'écrire les solutions du polynôme caractéristique sous la forme

$$z_1 = \rho e^{i\theta} \quad z_2 = \rho e^{-i\theta} \quad z_3 = \rho^{-1} e^{-i\theta} = z_1^{-1} \quad z_4 = \rho^{-1} e^{i\theta} = z_2^{-1}.$$

Vu la forme particulière de ces quatre solutions, il n'est pas restrictif de supposer que $0 < \rho < 1$. Ceci entraîne que les deux racines conjuguées z_3 et z_4 ont un module supérieur à 1, tandis que les deux racines conjuguées z_1 et z_2 ont un module inférieur à 1. Cette dernière caractéristique entraîne la **non "inversibilité" du filtre HP**, au sens

où on l'entend dans le domaine des séries chronologiques (voir HAMILTON [1994], p.67). Autrement dit, le calcul de la valeur filtrée y_q à la date q fait intervenir des observations "futurs" $\{x_{q+\ell}; \ell \geq 0\}$ de la série initiale \mathbf{X}_Z et non pas exclusivement des valeurs "passées" de cette série initiale.

Cependant, le filtre *HP* sera dit *mathématiquement inversible*, signifiant par-là que cet inverse – s'il existe – sera un opérateur qui, appliqué à une observation courante x_q de la série initiale \mathbf{X}_Z , fait intervenir aussi bien des valeurs antérieures à cette observation courante que des valeurs postérieures à cette observation courante.

3.1.2 Des relations simples et utiles entre les paramètres ρ , θ et λ

L'identité (2) livre la relation

$$\rho^2 + \rho^{-2} + 4 \cos^2 \theta = 6 + \lambda^{-1}, \quad (5)$$

relation équivalente à la suivante :

$$\lambda^{-1} = \rho^2 + \rho^{-2} - 4 + 2 \cos 2\theta. \quad (6)$$

Signalons finalement les relations

$$\cos \theta = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \quad \sin \theta = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}. \quad (7)$$

Ces égalités seront utilisées dans le courant de ces notes.

3.2 Le filtre de Hodrick-Prescott est *mathématiquement inversible*

Réécrivant l'expression du filtre *HP* sous la forme

$$\begin{aligned} x_{q-2} &= [\lambda L^4 - 4\lambda L^3 + (6\lambda + 1)L^2 - 4\lambda L + \lambda] y_q \\ &= [\lambda(L - z_1)(L - z_2)(L - z_3)(L - z_4)] y_q, \end{aligned}$$

l'inverse de ce filtre s'exprime, formellement, par

$$[\lambda L^4 - 4\lambda L^3 + (6\lambda + 1)L^2 - 4\lambda L + \lambda]^{-1} = \lambda^{-1}(L - z_1)^{-1}(L - z_2)^{-1}(L - z_3)^{-1}(L - z_4)^{-1}.$$

Considérant isolément le facteur $(L - z_i)^{-1}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} (L - z_i)^{-1} &= -z_i^{-1}(1 - z_i^{-1}L)^{-1} \\ &= -z_i^{-1} [1 + z_i^{-1}L + z_i^{-2}L^2 + z_i^{-3}L^3 + \dots], \end{aligned}$$

série **absolument convergente** si le module de la racine z_i vérifie $|1/z_i| < 1$, justifiant a posteriori le développement en série opéré ci-dessus. Auquel cas, le facteur $(L - z_i)$ est inversible. Ainsi, les opérateurs $L - z_3$ et $L - z_4$ sont inversibles. Par contre, les racines z_1 et z_2 posent problème. On contourne cette difficulté recourant à la relation $(1 - z)^{-1} = -z^{-1}(1 - z^{-1})^{-1}$. Cette dernière permet de réécrire

$$\begin{aligned} (L - z_i)^{-1} &= -z_i^{-1}(1 - z_i^{-1}L)^{-1} \\ &= z_i^{-1} [z_i L^{-1}(1 - z_i L^{-1})^{-1}] \\ &= L^{-1}(1 - z_i L^{-1})^{-1} \\ &= L^{-1}(1 + z_i L^{-1} + z_i^2 L^{-2} + z_i^3 L^{-3} + \dots), \end{aligned}$$

série absolument convergente lorsque le module de la racine z_i vérifie $|z_i| < 1$. Cependant, cette convergence à un prix : les opérateurs L^{-n} entraînent que le calcul de la valeur y_q de la série filtrée fait intervenir des valeurs "futures" de la série chronologique initiale x_k , c'est-à-dire des éléments $\{x_{q+\ell}; \ell > 0\}$ dont les indices sont postérieures à la valeur de l'indice q de l'élément courant y_q calculé. "Inverser" le filtre *HP* ne pourra donc se faire qu'en faisant intervenir, entre autres, des valeurs "futures".

3.2.1 L'inverse du filtre *HP* est *Invariant*

L'inverse du filtre *HP* s'écrira donc

$$\begin{aligned} & [\lambda L^4 - 4\lambda L^3 + (6\lambda + 1)L^2 - 4\lambda L + \lambda]^{-1} = \\ & = \lambda^{-1}(L - z_1)^{-1}(L - z_2)^{-1}(L - z_3)^{-1}(L - z_4)^{-1} \\ & = \lambda^{-1}L^{-1}(1 - z_1L^{-1})^{-1}L^{-1}(1 - z_2L^{-1})^{-1}z_3^{-1}(1 - z_3^{-1}L)^{-1}z_4^{-1}(1 - z_4^{-1}L)^{-1} \\ & = \rho^2\lambda^{-1}L^{-2}(1 - z_1L^{-1})^{-1}(1 - z_2L^{-1})^{-1}(1 - z_3^{-1}L)^{-1}(1 - z_4^{-1}L)^{-1} \\ & = \rho^2\lambda^{-1}L^{-2}(1 - z_1L^{-1})^{-1}(1 - z_2L^{-1})^{-1}(1 - z_1L)^{-1}(1 - z_2L)^{-1}. \end{aligned}$$

Sachant que la série

$$(1 - z_1L^{-1})^{-1}(1 - z_2L^{-1})^{-1}(1 - z_1L)^{-1}(1 - z_2L)^{-1}$$

comprise dans l'expression de cet inverse est le produit de séries absolument convergentes, il en découle que cette série est elle-même absolument convergente. L'inverse ci-dessus est donc parfaitement bien défini. Cet inverse est clairement *invariant*, son expression étant indépendante de la valeur de l'indice q de l'élément x_q .

3.2.2 L'inverse du filtre *HP* est une moyenne mobile *symétrique*

Partant de l'expression du filtre *HP* :

$$\begin{aligned} x_q & = \lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q \\ & = [\lambda(L + L^{-1} - 2)^2 + 1] y_q \\ & = [\lambda(1 - L)^2(1 - L^{-1})^2 + 1] y_q, \end{aligned}$$

nous savons dorénavant que l'expression $[1 + \lambda(L + L^{-1} - 2)^2]^{-1}$ a un sens, livrant une série absolument convergente. Nous pouvons donc conclure, du fait que dans cette expression les rôles de L et L^{-1} peuvent être permutés sans rien modifier à cette expression, que cette série est symétrique.

3.2.3 L'inverse du filtre *HP* est une moyenne mobile *normalisée*

On peut toujours écrire

$$\rho^2\lambda^{-1}L^{-2}(1 - z_1L^{-1})^{-1}(1 - z_2L^{-1})^{-1}(1 - z_1L)^{-1}(1 - z_2L)^{-1} = \rho^2\lambda^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r L^r.$$

On s'intéresse ici à la somme des poids de l'inverse du filtre *HP*, c'est-à-dire à la somme $\rho^2\lambda^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r$. Il est clair que si dans l'expression précédente on remplace l'opérateur L par l'opérateur identité I , alors on obtient la somme voulue :

$$\rho^2\lambda^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r = \frac{\rho^2\lambda^{-1}}{(1 - z_1)^2(1 - z_2)^2}.$$

Calculons ce quotient :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho^2 \lambda^{-1}}{(1-z_1)^2(1-z_2)^2} &= \frac{\rho^2 \lambda^{-1}}{(1-\rho e^{i\theta})^2(1-\rho e^{-i\theta})^2} \\
&= \frac{\rho^2 \lambda^{-1}}{1-4\rho \cos \theta(1+\rho^2)+2\rho^2 \cos 2\theta+4\rho^2+\rho^4} \\
&= \frac{\rho^2(\rho^2+\rho^{-2}-4+2\cos 2\theta)}{1-4\rho \cos \theta(1+\rho^2)+2\rho^2 \cos 2\theta+4\rho^2+\rho^4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

où on a remplacé λ^{-1} par $\rho^2+\rho^{-2}-4+2\cos 2\theta$ dans l'avant dernière égalité et utilisé la relation $\cos \theta = 2\rho/(1+\rho^2)$ (voir les relations du point 2.3.4). La somme des poids de la moyenne mobile inversant le filtre HP vaut donc 1.

3.2.4 Revenons au calcul de l'inverse

Le produit des deux séries $(1-z_1 L^{-1})^{-1}$ et $(1-z_2 L^{-1})^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
(1-z_1 L^{-1})^{-1}(1-z_2 L^{-1})^{-1} &= \\
&= [1+z_1 L^{-1}+z_1^2 L^{-2}+z_1^3 L^{-3}+\dots] [1+z_2 L^{-1}+z_2^2 L^{-2}+z_2^3 L^{-3}+\dots] \\
&= 1+2\rho \cos \theta L^{-1}+\rho^2(1+2\cos 2\theta)L^{-2}+\rho^3(2\cos \theta+2\cos 3\theta)L^{-3}+ \\
&\quad +\rho^4(1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta)L^{-4}+\rho^5(2\cos \theta+2\cos 3\theta+2\cos 5\theta)L^{-5}+\dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} L^{-2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n+1} L^{-2n-1} \sum_{k=0}^n \cos[(2k+1)\theta] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} L^{-2n} \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta),
\end{aligned}$$

où, tenant compte de l'**absolue convergence** des deux séries initiales, on a effectué le produit des séries terme à terme et réarrangé à notre guise les termes résultants, l'absolue convergence permettant d'ordonner les termes d'une série arbitrairement, l'ordre retenu n'ayant aucune incidence sur le résultat de cette série. De même, le produit des deux séries $(1-z_3^{-1}L)^{-1}$ et $(1-z_4^{-1}L)^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
(1-z_3^{-1}L)^{-1}(1-z_4^{-1}L)^{-1} &= (1-z_1 L)^{-1}(1-z_2 L)^{-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} L^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n+1} L^{2n+1} \sum_{k=0}^n \cos[(2k+1)\theta] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} L^{2n} \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta).
\end{aligned}$$

Tenant compte des identités suivantes

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=0}^n \cos[(2k+1)\theta] &= 2\Re \left[\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)\theta} \right] = \frac{\cos(2n+1)\theta - \cos(2n+3)\theta}{1 - \cos 2\theta} = A(n) \\
2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) &= 2\Re \left[\sum_{k=1}^n e^{i2k\theta} \right] = \frac{\cos(2n\theta) - 1 - \cos[2(n+1)\theta] + \cos(2\theta)}{1 - \cos 2\theta} = B(n),
\end{aligned}$$

on obtient finalement,

$$(1-z_1 L^{\mp 1})^{-1}(1-z_2 L^{\mp 1})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [1+B(n)] \rho^{2n} L^{\mp 2n} + \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \rho^{2n+1} L^{\mp(2n+1)}.$$

Afin de se donner une idée des ordres de grandeurs des différents paramètres impliqués, voici quelques chiffres :

λ	ρ	θ	$\max A(n)$	$\max B(n)$	$\min A(n)$	$\min B(n)$
1	0.480534	0.674889	1.600	0.599	-1.601	-2.600
10	0.668526	0.392219	2.616	1.501	-2.616	-3.498
100	0.798893	0.222665	4.528	3.528	-4.528	-5.525
1600	0.894116	0.111687	8.972	7.971	-8.970	-9.967
10000	0.931704	0.070681	14.160	13.159	-14.153	-15.156
100000	0.961012	0.039758	25.154	24.154	-25.153	-26.154

Inversant le filtre *HP*, notre objectif ici est de déterminer le coefficient de chaque $L^h, h \in \mathbb{Z}$. Ceci exige, dans la méthode de calculs adoptée dans ce paragraphe, de multiplier les deux séries précédentes. On peut évidemment tenir compte du fait que le facteur ρ^n diminue lorsque n croît, et ainsi multiplier des séries tronquées, partant du principe que les termes de ces séries deviennent négligeables pour de "grandes" valeurs de n . Mais à quelle "vitesse" ce facteur ρ^n diminue-t-il ? Pour une valeur standard de λ , à savoir $\lambda = 1600$, on a $\rho \sim 0.894$, ce qui donne $\rho^{20} \sim 0.1$. Vu les ordres de grandeur de $\max |A(n)|$ et $\max |B(n)|$ pour cette valeur de λ (voir tableau ci-dessus), il est donc obligatoire de considérer des valeurs de n voisinant 40 ou 50 pour être assuré que les termes au-delà de ce seuil seront effectivement négligeables dans les séries. Cette valeur de n augmentant avec le paramètre λ . Cela nécessite malheureusement de multiplier des séries comportant un nombre élevé de termes, travail laborieux et décourageant. C'est la raison pour laquelle l'inversion du filtre *HP* sera tentée selon une autre voie, voie exploitant les *équations aux différences*.

3.3 Inversion du filtre de Hodrick-Prescott par la méthode des *équations aux différences*

On aimerait exprimer l'élément $y_q; q \in \mathbb{Z}$ en fonction de la série chronologique initiale $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \dots$. Autrement dit, on aimerait inverser l'opérateur

$$\lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q = x_q.$$

3.3.1 Les solutions non nulles de l'équation homogène ne sont pas bornées sur \mathbb{Z}

Abordons la théorie des *équations aux différences*. Posant l'indice $n = q - 2$, soit à résoudre l'équation aux différences suivante :

$$\lambda(y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n) + y_{n+2} = x_{n+2}. \quad (\text{ENH})$$

L'équation homogène (EH) associée à cette équation non-homogène (ENH) est :

$$\lambda y_{n+4} - 4\lambda y_{n+3} + (6\lambda + 1)y_{n+2} - 4\lambda y_{n+1} + \lambda y_n = 0, \quad (\text{EH})$$

équation homogène dont on recherche d'éventuelles solutions exponentielles :

$$y_n^{(H)} = z^n; \quad z \in \mathbb{C},$$

étant conscient ici que ces solutions ne sont pas bornées sur \mathbb{Z} . Si de telles solutions existent, cela entraîne

$$\lambda z^{n+4} - 4\lambda z^{n+3} + (6\lambda + 1)z^{n+2} - 4\lambda z^{n+1} + \lambda z^n = 0,$$

débouchant sur le polynôme caractéristique

$$\lambda z^4 - 4\lambda z^3 + (6\lambda + 1)z^2 - 4\lambda z + \lambda = 0. \quad (8)$$

Les quatre racines complexes distinctes z_1, z_2, z_3, z_4 de ce polynôme sont celles déjà explicitées précédemment. Rappelons que

$$z_1 = \rho e^{i\theta} \quad z_2 = \rho e^{-i\theta} \quad z_3 = z_1^{-1} \quad z_4 = z_2^{-1},$$

où on a posé

$$\rho = \sqrt{\Im^2(z_1) + \Re^2(z_1)} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(z_1)}{\Re(z_1)} \right),$$

nombres réels définis en fonction du paramètre λ (sachant que $\lambda > 0$). N'étant pas restrictif d'imposer $0 < \rho < 1$, on conclut que les deux racines (conjuguées) z_3 et z_4 ont un module supérieur à 1, tandis que les deux racines (conjuguées) z_1 et z_2 ont un module inférieur à 1.

Ainsi, les quatre solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation homogène (EH) sont donc données par les fonctions :

$$y_n^{(1)} = \rho^n e^{in\theta} \quad y_n^{(2)} = \rho^n e^{-in\theta} \quad y_n^{(3)} = \rho^{-n} e^{-in\theta} \quad y_n^{(4)} = \rho^{-n} e^{in\theta},$$

ou encore les quatre fonctions réelles

$$y_n^{(1)} = \rho^n \cos n\theta \quad y_n^{(2)} = \rho^n \sin n\theta \quad y_n^{(3)} = \rho^{-n} \cos n\theta \quad y_n^{(4)} = \rho^{-n} \sin n\theta.$$

Aucune de ces quatre solutions particulières n'est bornée sur \mathbb{Z} . Nous verrons plus loin comment contourner cette difficulté. La solution générale de l'équation homogène (EH) est ainsi

$$y_n = \rho^n \left(r^{(1)} \cos n\theta + r^{(2)} \sin n\theta \right) + \rho^{-n} \left(r^{(3)} \cos n\theta + r^{(4)} \sin n\theta \right), \quad (9)$$

où $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, r^{(4)}$ sont des constantes réelles quelconques. On voit donc que – exceptée la solution nulle – toutes les solutions de l'équation homogène (EH) sont non bornées sur \mathbb{Z} . Nous tiendrons compte de ce résultat par la suite.

3.3.2 Conversion en une équation différentielle de l'équation aux différences

Simplifions l'expression (ENH) du problème initial à l'aide de l'opérateur Δ défini sur une série chronologique quelconque z_k comme suit :

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k \quad (10)$$

$$\Delta^p z_k = \Delta^{p-1}(\Delta z_k). \quad (11)$$

Par exemple, on établit aisément les relations suivantes :

$$\Delta^2 z_k = z_{k+2} - 2z_{k+1} + z_k \quad (12)$$

$$\Delta^3 z_k = z_{k+3} - 3z_{k+2} + 3z_{k+1} - z_k \quad (13)$$

$$\Delta^4 z_k = z_{k+4} - 4z_{k+3} + 6z_{k+2} - 4z_{k+1} + z_k. \quad (14)$$

Deux propriétés essentielles de l'opérateur Δ sont les suivantes :

$$\Delta(z_k + w_k) = \Delta z_k + \Delta w_k \quad (15)$$

$$\Delta([zw]_k) = z_k \Delta w_k + w_{k+1} \Delta z_k. \quad (16)$$

Utilisant successivement les relations (14), (12) et (10), l'équation homogène (EH) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda(y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n) + y_{n+2} &= \\ &= \lambda \Delta^4 y_n + y_{n+2} \\ &= \lambda \Delta^4 y_n + \Delta^2 y_n + 2y_{n+1} - y_n \\ &= \lambda \Delta^4 y_n + \Delta^2 y_n + \Delta y_n + y_{n+1} \\ &= \lambda \Delta^4 y_n + \Delta^2 y_n + \Delta y_n + \Delta y_n + y_n \\ &= \lambda \Delta^4 y_n + \Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n, \end{aligned}$$

permettant de réécrire l'équation aux différences de départ (ENH) sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 4

$$\lambda \Delta^4 y_n + \Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n = x_{n+2}. \quad (\text{EQD})$$

On va voir ci-après qu'il ne s'agit pas ici d'un simple jeu de réécriture, mais bien d'une formulation plus souple pour réduire le problème.

3.3.3 Réduction à l'ordre 1 de l'équation différentielle initiale d'ordre 4

Un changement de variables va nous permettre de réduire l'ordre du problème initial, nous faisant passer d'une équation différentielle initiale (EQD) d'ordre 4 à un système de quatre équations différentielles d'ordre 1 chacune. Définissons à présent les vecteurs Υ_n et $\Upsilon_n^{(i)}$; $i = 1, 2, 3, 4$ suivant :

$$\Upsilon_n = \begin{pmatrix} y_n \\ \Delta y_n \\ \Delta^2 y_n \\ \Delta^3 y_n \end{pmatrix} \quad \Upsilon_n^{(i)} = \begin{pmatrix} y_n^{(i)} \\ \Delta y_n^{(i)} \\ \Delta^2 y_n^{(i)} \\ \Delta^3 y_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

Ces notations permettent de réécrire l'équation non-homogène (ENH) sous forme matricielle

$$\Delta \Upsilon_n = \mathcal{M} \Upsilon_n + \mathcal{B}, \quad (\text{ENHM})$$

où les matrices \mathcal{M} et \mathcal{B} sont définies comme suit :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\lambda & -2/\lambda & -1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{n+2}/\lambda \end{pmatrix},$$

l'équation non-homogène matricielle (ENHM) étant d'ordre 1.

3.3.4 La méthode de la *variation des constantes*

Soit l'équation homogène matricielle (EHM)

$$\Delta \Upsilon_n^{(H)} = \mathcal{M} \Upsilon_n^{(H)}, \quad (\text{EHM})$$

associée à l'équation non-homogène (ENHM). Les quatre vecteurs $\Upsilon_n^{(1)}, \dots, \Upsilon_n^{(4)}$ particuliers solutions de l'équation homogène (EHM) – vecteurs linéairement indépendants – forment une base du sous-vectoriel \mathcal{U}_H qu'est l'ensemble des vecteurs vérifiant cette équation homogène (EHM). Autrement dit, à tout vecteur $\Upsilon_n^{(H)}$ vérifiant l'équation (EHM), correspondent quatre réels $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(3)}, \mathbf{r}^{(4)}$ tels que

$$\Upsilon_n^{(H)} = \mathbf{r}^{(1)} \Upsilon_n^{(1)} + \mathbf{r}^{(2)} \Upsilon_n^{(2)} + \mathbf{r}^{(3)} \Upsilon_n^{(3)} + \mathbf{r}^{(4)} \Upsilon_n^{(4)}.$$

On sait que la solution générale de l'équation non-homogène est un translaté de l'espace vectoriel \mathcal{U}_H engendré par les solutions de l'équation homogène. Plus précisément, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation non-homogène peut s'écrire comme la somme vectorielle $\mathcal{U}_H + S_P$, où S_P est une solution particulière de l'équation non-homogène. Reste dès lors à déterminer une solution particulière $\Upsilon_n^{(P)}$ de l'équation non-homogène (ENHM). Pour ce faire, nous allons recourir à la méthode dite *variation des constantes*. Cette méthode consiste à faire varier les constantes $\mathbf{r}^{(i)}$ pour ce faisant déterminer une solution particulière $\Upsilon_n^{(P)}$ de l'équation non-homogène (ENHM), c'est-à-dire vérifiant :

$$\Delta \Upsilon_n^{(P)} = \mathcal{M} \Upsilon_n^{(P)} + \mathcal{B}.$$

Partant d'une solution quelconque $\Upsilon_n^{(H)}$ de l'équation homogène (EHM), autrement dit considérant un vecteur tel que

$$\Delta \Upsilon_n^{(H)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}^{(i)} \Delta \Upsilon_n^{(i)} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{M} \mathbf{r}^{(i)} \Upsilon_n^{(i)} \quad \forall \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(3)}, \mathbf{r}^{(4)} \in \mathbb{R},$$

on traite les facteurs $\mathbf{r}^{(i)}$ non plus comme des constantes mais comme des fonctions de n , ce que nous écrivons $\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)}(n) = \mathbf{r}_n^{(i)}$. On veut déterminer ces quatre fonctions – c.à.d. faire varier les constantes $\mathbf{r}^{(i)}$ – de manière à construire une solution particulière de l'équation non-homogène (ENHM). Gardant à l'esprit que les coefficients $\mathbf{r}_n^{(i)}$ sont dorénavant des fonctions de n , on écrit

$$\Upsilon_n^{(P)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)},$$

solution particulière dont la différence première vaut :

$$\Delta \Upsilon_n^{(P)} = \Delta \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)} \right] = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)} \right] + \mathcal{B}.$$

Dans ces conditions, on obtient, appliquant les propriétés (15) et (16),

$$\begin{aligned} \Delta \Upsilon_n^{(P)} &= \Delta \left[\mathbf{r}_n^{(1)} \Upsilon_n^{(1)} + \mathbf{r}_n^{(2)} \Upsilon_n^{(2)} + \mathbf{r}_n^{(3)} \Upsilon_n^{(3)} + \mathbf{r}_n^{(4)} \Upsilon_n^{(4)} \right] \\ &= \Delta \left[\mathbf{r}_n^{(1)} \Upsilon_n^{(1)} \right] + \Delta \left[\mathbf{r}_n^{(2)} \Upsilon_n^{(2)} \right] + \Delta \left[\mathbf{r}_n^{(3)} \Upsilon_n^{(3)} \right] + \Delta \left[\mathbf{r}_n^{(4)} \Upsilon_n^{(4)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^4 \left[\mathbf{r}_n^{(i)} \Delta \Upsilon_n^{(i)} + \Upsilon_{n+1}^{(i)} \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} \right]. \end{aligned}$$

Les constantes étant rendues "variables" dans le but de construire une solution particulière $\Upsilon_n^{(P)}$ de l'équation non-homogène (ENHM), on impose l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left[\mathbf{r}_n^{(i)} \Delta \Upsilon_n^{(i)} + \Upsilon_{n+1}^{(i)} \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} \right] &= \mathcal{M} \Upsilon_n^{(P)} + \mathcal{B} \\ &= \sum_{i=1}^4 \mathcal{M} \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)} + \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Or, par définition, les solutions de base $\Upsilon_n^{(i)}$ sont solutions de l'équation homogène (EHM). Autrement dit, $\Delta \Upsilon_n^{(i)} = \mathcal{M} \Upsilon_n^{(i)}$. Nous vient ainsi l'égalité

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Delta \Upsilon_n^{(i)} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{M} \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)},$$

les coefficients $\mathbf{r}_n^{(i)}$ à gauche et à droites étant identiques. Ce qui livre finalement :

$$\sum_{i=1}^4 \Upsilon_{n+1}^{(i)} \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} = \mathcal{B},$$

système de quatre équations aux quatre inconnues $\Delta \mathbf{r}_n^{(i)}$; $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} y_{n+1}^{(i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} \Delta y_{n+1}^{(i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} \Delta^2 y_{n+1}^{(i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \Delta \mathbf{r}_n^{(i)} \Delta^3 y_{n+1}^{(i)} = x_{n+2}/\lambda. \end{cases} \quad (17)$$

Ces inconnues $\Delta \mathbf{r}_n^{(i)}$ sont des différences d'ordre 1.

3.3.5 Un système dont les inconnues $\Delta \mathbf{r}_n^{(i)}$ sont des différences d'ordre 1

Les solutions du système (17) seront explicitées selon la notation de CRAMER (dite *règle de Cramer*), à savoir sous forme de quotients de déterminants. Le déterminant de ce système

$$\delta_n = \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ \Delta y_{n+1}^{(1)} & \Delta y_{n+1}^{(2)} & \Delta y_{n+1}^{(3)} & \Delta y_{n+1}^{(4)} \\ \Delta^2 y_{n+1}^{(1)} & \Delta^2 y_{n+1}^{(2)} & \Delta^2 y_{n+1}^{(3)} & \Delta^2 y_{n+1}^{(4)} \\ \Delta^3 y_{n+1}^{(1)} & \Delta^3 y_{n+1}^{(2)} & \Delta^3 y_{n+1}^{(3)} & \Delta^3 y_{n+1}^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} & y_{n+2}^{(3)} & y_{n+2}^{(4)} \\ y_{n+3}^{(1)} & y_{n+3}^{(2)} & y_{n+3}^{(3)} & y_{n+3}^{(4)} \\ y_{n+4}^{(1)} & y_{n+4}^{(2)} & y_{n+4}^{(3)} & y_{n+4}^{(4)} \end{vmatrix},$$

se simplifie comme indiqué à droite, par recours aux propriétés (10), (12) et (13) et procédant aux combinaisons linéaires ad hoc (par exemple, remplaçant la 2^{ème} ligne $L2$ par $L2' = L1 + L2$, la 3^{ème} ligne $L3$ par $L3' = L3 + 2L2' - L1$, etc.). Ce dernier déterminant se simplifie à son tour : considérant la définition des équations particulières $y_n^{(i)}$ de l'équation homogène (EH), on peut écrire :

$$y_{n+4}^{(i)} = 4y_{n+3}^{(i)} - (6 + 1/\lambda)y_{n+2}^{(i)} + 4y_{n+1}^{(i)} - y_n^{(i)}; \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

et remplacer chaque élément de la quatrième ligne du déterminant par la combinaison linéaire ci-dessus. Cette combinaison reprenant les éléments des trois lignes précédentes, excepté l'élément $y_n^{(i)}$, le déterminant se simplifie comme suit :

$$\delta_n = \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} & y_{n+2}^{(3)} & y_{n+2}^{(4)} \\ y_{n+3}^{(1)} & y_{n+3}^{(2)} & y_{n+3}^{(3)} & y_{n+3}^{(4)} \\ y_{n+4}^{(1)} & y_{n+4}^{(2)} & y_{n+4}^{(3)} & y_{n+4}^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} & y_{n+2}^{(3)} & y_{n+2}^{(4)} \\ y_{n+3}^{(1)} & y_{n+3}^{(2)} & y_{n+3}^{(3)} & y_{n+3}^{(4)} \\ -y_n^{(1)} & -y_n^{(2)} & -y_n^{(3)} & -y_n^{(4)} \end{vmatrix}.$$

On a ainsi,

$$\delta_n = - \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} & y_{n+2}^{(3)} & y_{n+2}^{(4)} \\ y_{n+3}^{(1)} & y_{n+3}^{(2)} & y_{n+3}^{(3)} & y_{n+3}^{(4)} \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & y_n^{(3)} & y_n^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & y_n^{(3)} & y_n^{(4)} \\ y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & y_{n+1}^{(3)} & y_{n+1}^{(4)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} & y_{n+2}^{(3)} & y_{n+2}^{(4)} \\ y_{n+3}^{(1)} & y_{n+3}^{(2)} & y_{n+3}^{(3)} & y_{n+3}^{(4)} \end{vmatrix},$$

aboutissant à la relation de récurrence :

$$\delta_n = \delta_{n-1}.$$

Dès lors, ce déterminant est une constante et on a, par exemple,

$$\begin{aligned} \delta_n = \delta_{-1} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho^{-1} \cos \theta & \rho^{-1} \sin \theta \\ \rho^2 \cos 2\theta & \rho^2 \sin 2\theta & \rho^{-2} \cos 2\theta & \rho^{-2} \sin 2\theta \\ \rho^3 \cos 3\theta & \rho^3 \sin 3\theta & \rho^{-3} \cos 3\theta & \rho^{-3} \sin 3\theta \end{vmatrix} \\ &= (\rho^2 - \rho^{-2})^2 \sin \theta \cos 2\theta \sin 3\theta - (\rho - \rho^{-1})^2 \cos \theta \sin 2\theta \sin 3\theta \\ &\quad - (\rho^2 + \rho^{-2} - \rho^4 - \rho^{-4})^2 \sin \theta \sin 2\theta \cos 3\theta. \end{aligned}$$

Notons $\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}, \delta_n^{(3)}, \delta_n^{(4)}$ respectivement les déterminants suivants :

$$\begin{aligned} \delta_n^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & \rho^{n+1} \sin(n+1)\theta & \rho^{-n-1} \cos(n+1)\theta & \rho^{-n-1} \sin(n+1)\theta \\ 0 & \rho^{n+2} \sin(n+2)\theta & \rho^{-n-2} \cos(n+2)\theta & \rho^{-n-2} \sin(n+2)\theta \\ 0 & \rho^{n+3} \sin(n+3)\theta & \rho^{-n-3} \cos(n+3)\theta & \rho^{-n-3} \sin(n+3)\theta \\ x_{n+2}/\lambda & \rho^{n+4} \sin(n+4)\theta & \rho^{-n-4} \cos(n+4)\theta & \rho^{-n-4} \sin(n+4)\theta \end{vmatrix} \\ &= -\frac{x_{n+2}}{\lambda} \rho^{-n-1} \begin{vmatrix} \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ \rho \sin(n+2)\theta & \rho^{-1} \cos(n+2)\theta & \rho^{-1} \sin(n+2)\theta \\ \rho^2 \sin(n+3)\theta & \rho^{-2} \cos(n+3)\theta & \rho^{-2} \sin(n+3)\theta \end{vmatrix} \\ &= -x_{n+2} \frac{(1-\rho^2) \sin \theta}{\lambda} \rho^{-n-4} [\sin(n+1)\theta - \rho^2 \sin(n+3)\theta]; \\ \delta_n^{(2)} &= \begin{vmatrix} \rho^{n+1} \cos(n+1)\theta & 0 & \rho^{-n-1} \cos(n+1)\theta & \rho^{-n-1} \sin(n+1)\theta \\ \rho^{n+2} \cos(n+2)\theta & 0 & \rho^{-n-2} \cos(n+2)\theta & \rho^{-n-2} \sin(n+2)\theta \\ \rho^{n+3} \cos(n+3)\theta & 0 & \rho^{-n-3} \cos(n+3)\theta & \rho^{-n-3} \sin(n+3)\theta \\ \rho^{n+4} \cos(n+4)\theta & x_{n+2}/\lambda & \rho^{-n-4} \cos(n+4)\theta & \rho^{-n-4} \sin(n+4)\theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{x_{n+2}}{\lambda} \rho^{-n-1} \begin{vmatrix} \cos(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ \rho \cos(n+2)\theta & \rho^{-1} \cos(n+2)\theta & \rho^{-1} \sin(n+2)\theta \\ \rho^2 \cos(n+3)\theta & \rho^{-2} \cos(n+3)\theta & \rho^{-2} \sin(n+3)\theta \end{vmatrix} \\ &= x_{n+2} \frac{(1-\rho^2) \sin \theta}{\lambda} \rho^{-n-4} [\cos(n+1)\theta - \rho^2 \cos(n+3)\theta]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_n^{(3)} &= \begin{vmatrix} \rho^{n+1} \cos(n+1)\theta & \rho^{n+1} \sin(n+1)\theta & 0 & \rho^{-n-1} \sin(n+1)\theta \\ \rho^{n+2} \cos(n+2)\theta & \rho^{n+2} \sin(n+2)\theta & 0 & \rho^{-n-2} \sin(n+2)\theta \\ \rho^{n+3} \cos(n+3)\theta & \rho^{n+3} \sin(n+3)\theta & 0 & \rho^{-n-3} \sin(n+3)\theta \\ \rho^{n+4} \cos(n+4)\theta & \rho^{n+4} \sin(n+4)\theta & x_{n+2}/\lambda & \rho^{-n-4} \sin(n+4)\theta \end{vmatrix} \\
&= -\frac{x_{n+2}}{\lambda} \rho^{n+1} \begin{vmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ \rho \cos(n+2)\theta & \rho \sin(n+2)\theta & \rho^{-1} \sin(n+2)\theta \\ \rho^2 \cos(n+3)\theta & \rho^2 \sin(n+3)\theta & \rho^{-2} \sin(n+3)\theta \end{vmatrix} \\
&= -x_{n+2} \frac{(1-\rho^{-2}) \sin \theta}{\lambda} \rho^{n+4} [\sin(n+1)\theta - \rho^{-2} \sin(n+3)\theta]; \\
\delta_n^{(4)} &= \begin{vmatrix} \rho^{n+1} \cos(n+1)\theta & \rho^{n+1} \sin(n+1)\theta & \rho^{-n-1} \cos(n+1)\theta & 0 \\ \rho^{n+2} \cos(n+2)\theta & \rho^{n+2} \sin(n+2)\theta & \rho^{-n-2} \cos(n+2)\theta & 0 \\ \rho^{n+3} \cos(n+3)\theta & \rho^{n+3} \sin(n+3)\theta & \rho^{-n-3} \cos(n+3)\theta & 0 \\ \rho^{n+4} \cos(n+4)\theta & \rho^{n+4} \sin(n+4)\theta & \rho^{-n-4} \cos(n+4)\theta & x_{n+2}/\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{x_{n+2}}{\lambda} \rho^{n+1} \begin{vmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \\ \rho \cos(n+2)\theta & \rho \sin(n+2)\theta & \rho^{-1} \cos(n+2)\theta \\ \rho^2 \cos(n+3)\theta & \rho^2 \sin(n+3)\theta & \rho^{-2} \cos(n+3)\theta \end{vmatrix} \\
&= x_{n+2} \frac{(1-\rho^{-2}) \sin \theta}{\lambda} \rho^{n+4} [\cos(n+1)\theta - \rho^{-2} \cos(n+3)\theta];
\end{aligned}$$

Tenant compte de ces différentes notations, la *règle de Cramer* nous permet d'écrire les solutions du système (17) sous la forme

$$\Delta \mathbf{r}_n^{(i)} = \frac{\delta_n^{(i)}}{\delta_{-1}}; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (18)$$

L'ensemble des opérations précédentes nous a donc ramené de l'équation différentielle (EQD) d'ordre 4 au système ci-dessus de quatre équations différentielles d'ordre 1 chacune. Ces quatre équations sont à résoudre.

3.3.6 Propriétés des facteurs trigonométriques intervenant dans $\delta_n^{(i)}$

Quatre facteurs trigonométriques fonctions de n

$$\begin{aligned}
d_n^{(1|3)} &= \sin(n+1)\theta - \rho^{\pm 2} \sin(n+3)\theta \\
d_n^{(2|4)} &= \cos(n+1)\theta - \rho^{\pm 2} \cos(n+3)\theta,
\end{aligned}$$

apparaissent dans les déterminants $\delta_n^{(i)}$. Ces facteurs $d_n^{(i)}$ sont des fonctions périodiques de n , de période $2\pi/\theta$. Bien entendu, en toute rigueur, la valeur $2\pi/\theta$ n'étant pas forcément entière, on ne peut strictement parler de périodicité. Cependant, il est certain que dans un "voisinage" de l'entier m le plus proche du réel $n+2\pi/\theta$, le facteur $d_m^{(i)}$ prendra une valeur "proche" de $d_n^{(i)}$. Ceci entraîne que les facteurs $d_n^{(i)}$ peuvent être majorés indépendamment de n . En effet, tenant compte de la borne $\rho < 1$, il est évident que

$$|d_n^{(i)}| < 1 + \rho^2; \quad \forall n; \quad i = 1, 2; \quad (19)$$

$$|d_n^{(i)}| < 1 + \rho^{-2}; \quad \forall n; \quad i = 3, 4; \quad (20)$$

ces majorants dépendants du seul paramètre λ au travers de ρ .

3.3.7 Solution des équations différentielles d'ordre 1 pour les indices $i = 1$ et 2

Formellement, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(i)} &= \sum_{p=-\infty}^{n-1} \Delta \mathbf{r}_p^{(i)} = \sum_{p=-\infty}^{n-1} \mathbf{r}_{p+1}^{(i)} - \mathbf{r}_p^{(i)} \\
 &= [\mathbf{r}_n^{(i)} - \mathbf{r}_{n-1}^{(i)}] + [\mathbf{r}_{n-1}^{(i)} - \mathbf{r}_{n-2}^{(i)}] + [\mathbf{r}_{n-2}^{(i)} - \mathbf{r}_{n-3}^{(i)}] + \dots \\
 &= \mathbf{r}_n^{(i)} + [-\mathbf{r}_{n-1}^{(i)} + \mathbf{r}_{n-1}^{(i)}] + [-\mathbf{r}_{n-2}^{(i)} + \mathbf{r}_{n-2}^{(i)}] - \mathbf{r}_{n-3}^{(i)} + \dots \\
 &= \mathbf{r}_n^{(i)} - \mathbf{r}_{-\infty}^{(i)},
 \end{aligned}$$

étant entendu ici que l'on peut réarranger les termes de la série ci-dessus à notre guise, c'est-à-dire que la série est **absolument convergente**. Or, l'absolue convergence de cette série ci-dessus est assurée uniquement pour les indices $i = 1, 2$ et tenant compte d'une hypothèse supplémentaire stipulant que **la série chronologique initiale $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}$ est uniformément bornée**, autrement dit

$$|x_k| \leq M; \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

où M est indépendant de k . Cette hypothèse découle de l'appartenance de la série au sous-vectoriel ℓ^2 . Sous cette condition, on peut dès lors majorer $\delta_p^{(i)}$ ($i = 1, 2$) par les valeurs suivantes :

$$\left| \delta_p^{(i)} \right| < \frac{M(1-\rho^4) \sin \theta}{\lambda} \rho^{-p-4}; \quad i = 1, 2.$$

Dès lors, il en découle, toujours pour $i = 1, 2$, tenant compte du fait que $\rho < 1$:

$$\sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(i)} < \sum_{p=-\infty}^{n-1} \left| \delta_p^{(i)} \right| < \frac{M(1-\rho^4) \sin \theta}{\lambda} \sum_{p=-\infty}^{n-1} \rho^{-p-4} < \infty; \quad i = 1, 2.$$

Ce qui montre l'absolue convergence de la série $\sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. La relation $\sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(i)} / \delta_{-1} = \mathbf{r}_n^{(i)} - \mathbf{r}_{-\infty}^{(i)}$ n'est donc applicable que pour les seuls déterminants $\delta_p^{(1)}$ et $\delta_p^{(2)}$, tous deux comprenant le facteur ρ^{-p-1} , facteur décroissant exponentiellement sur l'intervalle $p \in]-\infty, n-1]$ lorsque $p \rightarrow -\infty$.

3.3.8 Solution des équations différentielles d'ordre 1 pour les indices $i = 3$ et 4

Suivant des arguments similaires, les déterminants $\delta_p^{(3)}$ et $\delta_p^{(4)}$ incluant le facteur ρ^{p+1} , facteur décroissant exponentiellement sur l'intervalle $p \in]n, \infty]$, la série $\sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(i)}$ convergent absolument pour $i = 3, 4$. En effet, tenant compte du fait que $\rho < 1$:

$$\left| \delta_p^{(i)} \right| < \frac{M(1-\rho^{-4}) \sin \theta}{\lambda} \rho^{p+4}; \quad i = 3, 4.$$

Ce qui livre, pour $i = 3, 4$, la majoration

$$\sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(i)} < \sum_{p=n}^{\infty} \left| \delta_p^{(i)} \right| < \frac{M(1-\rho^{-4}) \sin \theta}{\lambda} \sum_{p=n}^{\infty} \rho^{p+4} < \infty; \quad i = 3, 4.$$

Ainsi, on peut poser :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(i)} &= \sum_{p=n}^{\infty} \Delta \mathbf{r}_p^{(i)} = \sum_{p=n}^{\infty} \mathbf{r}_{p+1}^{(i)} - \mathbf{r}_p^{(i)} \\
&= [\mathbf{r}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{r}_n^{(i)}] + [\mathbf{r}_{n+2}^{(i)} - \mathbf{r}_{n+1}^{(i)}] + [\mathbf{r}_{n+3}^{(i)} - \mathbf{r}_{n+2}^{(i)}] + \dots \\
&= -\mathbf{r}_n^{(i)} + [\mathbf{r}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{r}_{n+1}^{(i)}] + [\mathbf{r}_{n+2}^{(i)} - \mathbf{r}_{n+2}^{(i)}] + \mathbf{r}_{n+3}^{(i)} + \dots \\
&= -\mathbf{r}_n^{(i)} + \mathbf{r}_{\infty}^{(i)},
\end{aligned}$$

3.3.9 Le choix des constantes $\mathbf{r}_{\infty}^{(i)}$ et $\mathbf{r}_{-\infty}^{(i)}$

On prendra $\mathbf{r}_{\infty}^{(i)} = \mathbf{r}_{-\infty}^{(i)} = 0$. Ce choix n'est pas restrictif. En effet, les conditions imposées aux séries chronologiques étudiées ici – appartenance au sous-vecteuriel ℓ^2 – sont telles que les éléments de ces séries tendent vers 0 lorsque leur indice tend vers ∞ . Il en sera donc de même pour les quatre séries matricielles $\Upsilon_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), et par conséquent pour la série matricielle $\Upsilon_n^{(P)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)}$. Dès lors, la valeur du poids $\mathbf{r}_n^{(i)}$ ne revêt aucune importance lorsque l'indice n tend vers ∞ . Ainsi, la solution de chacune des quatre équations (18) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_n^{(i)} &= \frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(i)}; & i = 1, 2; \\
\mathbf{r}_n^{(i)} &= -\frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(i)}; & i = 3, 4.
\end{aligned}$$

3.3.10 La solution particulière de l'équation non-homogène

La solution particulière exprimée sous forme vectorielle,

$$\Upsilon_n^{(P)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} \Upsilon_n^{(i)},$$

peut être développée composante par composante. Pour la première composante, on

obtient la solution particulière scalaire $y_n^{(P)}$ suivante :

$$\begin{aligned}
y_n^{(P)} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_n^{(i)} y_n^{(i)} \\
&= \frac{1}{\delta_{-1}} \left(y_n^{(1)} \sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(1)} + y_n^{(2)} \sum_{p=-\infty}^{n-1} \delta_p^{(2)} - y_n^{(3)} \sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(3)} - y_n^{(4)} \sum_{p=n}^{\infty} \delta_p^{(4)} \right) \\
&= \frac{(1 - \rho^2) \rho^n \sin \theta}{\lambda \delta_{-1}} \left\{ -\cos n\theta \sum_{p=-\infty}^{n-1} x_{p+2} \rho^{-p-4} [\sin(p+1)\theta - \rho^2 \sin(p+3)\theta] \right. \\
&\quad \left. + \sin n\theta \sum_{p=-\infty}^{n-1} x_{p+2} \rho^{-p-4} [\cos(p+1)\theta - \rho^2 \cos(p+3)\theta] \right\} \\
&\quad + \frac{(1 - \rho^{-2}) \rho^{-n} \sin \theta}{\lambda \delta_{-1}} \left\{ \cos n\theta \sum_{p=n}^{\infty} x_{p+2} \rho^{p+4} [\sin(p+1)\theta - \rho^{-2} \sin(p+3)\theta] \right. \\
&\quad \left. - \sin n\theta \sum_{p=n}^{\infty} x_{p+2} \rho^{p+4} [\cos(p+1)\theta - \rho^{-2} \cos(p+3)\theta] \right\}.
\end{aligned}$$

On a ici bel et bien inversé le filtre *HP*, exprimant chaque élément y_n ($n \in \mathbb{Z}$) de la série filtrée en fonction des éléments x_k ($k \in \mathbb{Z}$) de la série brute initiale. On a en fait établi les coefficients d'une moyenne mobile, formulant exactement le coefficient de chaque x_k .

3.3.11 L'équation non-homogène possède une seule et unique solution

L'ensemble des solutions y_n de l'équation non-homogène est donc la somme vectorielle de l'ensemble des solutions de l'équation homogène – espace vectoriel de dimensions 4 – et de l'équation particulière $y_n^{(P)}$:

$$y_n = \mathbf{r}^{(1)} \rho^n \cos n\theta + \mathbf{r}^{(2)} \rho^n \sin n\theta + \mathbf{r}^{(3)} \rho^{-n} \cos n\theta + \mathbf{r}^{(4)} \rho^{-n} \sin n\theta + y_n^{(P)},$$

où les quatre réels $\mathbf{r}^{(i)}$ sont les constantes introduites dans l'équation (9). A priori, l'ensemble de ces solutions est un espace vectoriel de dimensions 4. Or, nous avons vu précédemment que les solutions de l'équation homogène sont toutes non bornées sur \mathbb{Z} , exceptée la solution nulle. Il n'y a donc qu'une seule solution nous intéressant : celle pour laquelle les coefficients $\mathbf{r}^{(i)}$ de la solution générale sont égaux à 0. Ce qui entraîne :

$$y_n = y_n^{(P)}$$

L'espace des solutions se réduit ainsi à la dimension 0. Autrement dit, la solution est UNIQUE. Pour un indice naturel n fixé, la série ci-dessus exprime y_n sous la forme d'une moyenne pondérée de tous les éléments x_k ($k \in \mathbb{Z}$). Le coefficient de chaque x_k dans ce développement de y_n est celui repris dans le terme correspondant à $p = k - 2$, à savoir :

$$\begin{cases} \delta_{-1}^{-1} \rho^n \left(\delta_{k-2}^{(1)} \cos n\theta + \delta_{k-2}^{(2)} \sin n\theta \right) & \text{pour } k \leq n + 1 \\ \delta_{-1}^{-1} \rho^{-n} \left(\delta_{k-2}^{(3)} \cos n\theta + \delta_{k-2}^{(4)} \sin n\theta \right) & \text{pour } k \geq n + 2. \end{cases}$$

Pour $\boxed{k \leq n+1}$ fixé, le coefficient de x_k dans le développement de y_n est ainsi :

$$-\frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\lambda\delta_{-1}}\rho^{n-k-2}\cos n\theta [\sin(k-1)\theta - \rho^2\sin(k+1)\theta] \\ + \frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\lambda\delta_{-1}}\rho^{n-k-2}\sin n\theta [\cos(k-1)\theta - \rho^2\cos(k+1)\theta];$$

où la puissance $n-k-2$ de l'exponentielle ρ^{n-k-2} balaie l'intervalle $]-3, +\infty]$, évitant ainsi tout problème de non convergence.

Pour $\boxed{k \geq n+2}$ fixé, ce coefficient est :

$$\frac{(1-\rho^{-2})\sin\theta}{\lambda\delta_{-1}}\rho^{k+2-n}\cos n\theta [\sin(k-1)\theta - \rho^{-2}\sin(k+1)\theta] \\ - \frac{(1-\rho^{-2})\sin\theta}{\lambda\delta_{-1}}\rho^{k+2-n}\sin n\theta [\cos(k-1)\theta - \rho^{-2}\cos(k+1)\theta];$$

où la puissance $k+2-n$ de l'exponentielle ρ^{k+2-n} balaie l'intervalle $]4, +\infty]$, évitant ici aussi tout problème de non convergence.

3.3.12 Une formulation simplifiée du déterminant δ_{-1}

La symétrie et l'invariance de cette moyenne ont déjà été démontrés. On peut toutefois s'amuser à démontrer ces propriétés connaissant à présent une formulation analytique des poids de la moyenne mobile. Ce ne sera pas fait ici. Par contre, il s'avère qu'une simplification du déterminant δ_{-1} est possible tenant compte du fait que la somme des poids de la moyenne mobile vaut 1. En effet, calculons la somme de ces poids (en y_0) :

$$\sum_{k=-\infty}^1 \frac{\delta_{k-2}^{(1)}}{\delta_{-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{k-2}^{(3)}}{\delta_{-1}}.$$

Isolant le premier bloc de cette série et tenant compte du fait que $\sum_{k=a}^{\infty} r^k = r^a/(1-r)$ et symbolisant par $\Im[z]$ la partie imaginaire du nombre complexe z , on calcule :

$$\sum_{k=-\infty}^1 \frac{\delta_{k-2}^{(1)}}{\delta_{-1}} = -\frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\delta_{-1}\lambda} \sum_{k=-\infty}^1 \rho^{-k-2} [\sin(k-1)\theta - \rho^2\sin(k+1)\theta] \\ = -\frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\delta_{-1}\lambda} \Im \left[(\rho^{-2}e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \sum_{k=-1}^{\infty} (\rho e^{-i\theta})^k \right] \\ = -\frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\delta_{-1}\lambda} \Im \left[(\rho^{-2}e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \frac{\rho^{-1}e^{i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}} \right] \\ = -\frac{(1-\rho^2)\sin\theta}{\delta_{-1}\lambda} \Im \left[\frac{(\rho^{-2}e^{-i\theta} - e^{i\theta})\rho^{-1}e^{i\theta}(1-\rho e^{i\theta})}{(1-\rho e^{-i\theta})(1-\rho e^{i\theta})} \right] \\ = \frac{\sin\theta}{\lambda\delta_{-1}} \left\{ \frac{(\rho^{-2}-1)\sin\theta + (\rho^{-1}-\rho)\sin 2\theta + (\rho^2-1)\sin 3\theta}{1-2\rho\cos\theta + \rho^2} \right\}.$$

Isolant le deuxième bloc, on calcule de même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{k-2}^{(3)}}{\delta_{-1}} &= \frac{(1 - \rho^{-2}) \sin \theta}{\delta_{-1} \lambda} \sum_{k=-\infty}^1 \rho^{k+2} [\sin(k-1)\theta - \rho^{-2} \sin(k+1)\theta] \\ &= \frac{\sin \theta}{\delta_{-1} \lambda} \left\{ \frac{(\rho^4 - \rho^2) \sin \theta + (\rho^3 - \rho) \sin 2\theta + (1 - \rho^2) \sin 3\theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\sum_{k=-\infty}^1 \frac{\delta_{k-2}^{(1)}}{\delta_{-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{k-2}^{(3)}}{\delta_{-1}} = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda \delta_{-1}} \left\{ \frac{\rho^4 - \rho^2 + \rho^{-2} - 1 + 2(\rho^3 - 2\rho + \rho^{-1}) \cos \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right\}$$

Sachant que

$$\sum_{k=-\infty}^1 \frac{\delta_{k-2}^{(1)}}{\delta_{-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_{k-2}^{(3)}}{\delta_{-1}} = 1,$$

on en déduit, remplaçant $\cos \theta = 2\rho/(1 + \rho^2)$:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\lambda \delta_{-1}} (\rho^2 + \rho^{-2} + 6) = 1,$$

entraînant

$$\delta_{-1} = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda} (\rho^2 + \rho^{-2} + 6),$$

expression bien plus commode que celle faisant intervenir le déterminant 4×4 .

3.3.13 La moyenne mobile calculée en un point fixé : y_0

Vu l'invariance de la moyenne mobile, il nous suffit de l'étudier pour un n fixé. Considérons, par exemple, $n=0$. L'élément $y_0^{(P)}$ est la moyenne pondérée des éléments de la série chronologique x_k :

$$\begin{aligned} y_0^{(P)} &= \sum_{i=1}^4 k_0^{(i)} y_0^{(i)} = k_0^{(1)} y_0^{(1)} + k_0^{(3)} y_0^{(3)} = \frac{y_0^{(1)}}{\delta_{-1}} \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \delta_{\ell}^{(1)} + \frac{y_0^{(3)}}{\delta_{-1}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\ell}^{(3)} \\ &= -\frac{(1 - \rho^2) \sin \theta}{\lambda \delta_{-1}} \sum_{p=-\infty}^{-1} x_{p+2} \rho^{-p-4} [\sin(p+1)\theta - \rho^2 \sin(p+3)\theta] \\ &\quad + \frac{(1 - \rho^{-2}) \sin \theta}{\lambda \delta_{-1}} \sum_{p=0}^{\infty} x_{p+2} \rho^{p+4} [\sin(p+1)\theta - \rho^{-2} \sin(p+3)\theta]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour k fixé, le coefficient de x_k est, toujours pour y_0 , donné en $p = k - 2$:

$$\begin{cases} \delta_{k-2}^{(1)}/\delta_{-1} & \text{pour } k \leq 1 \\ \delta_{k-2}^{(3)}/\delta_{-1} & \text{pour } k \geq 2. \end{cases}$$

Ce qui donne le coefficient suivant pour x_k :

$$\begin{cases} -\delta_{-1}^{-1} (1 - \rho^2) \sin \theta \lambda^{-1} \rho^{-k-2} [\sin(k-1)\theta - \rho^2 \sin(k+1)\theta] & \text{pour } k \leq 1 \\ \delta_{-1}^{-1} (1 - \rho^{-2}) \sin \theta \lambda^{-1} \rho^{k+2} [\sin(k-1)\theta - \rho^{-2} \sin(k+1)\theta] & \text{pour } k \geq 2, \end{cases}$$

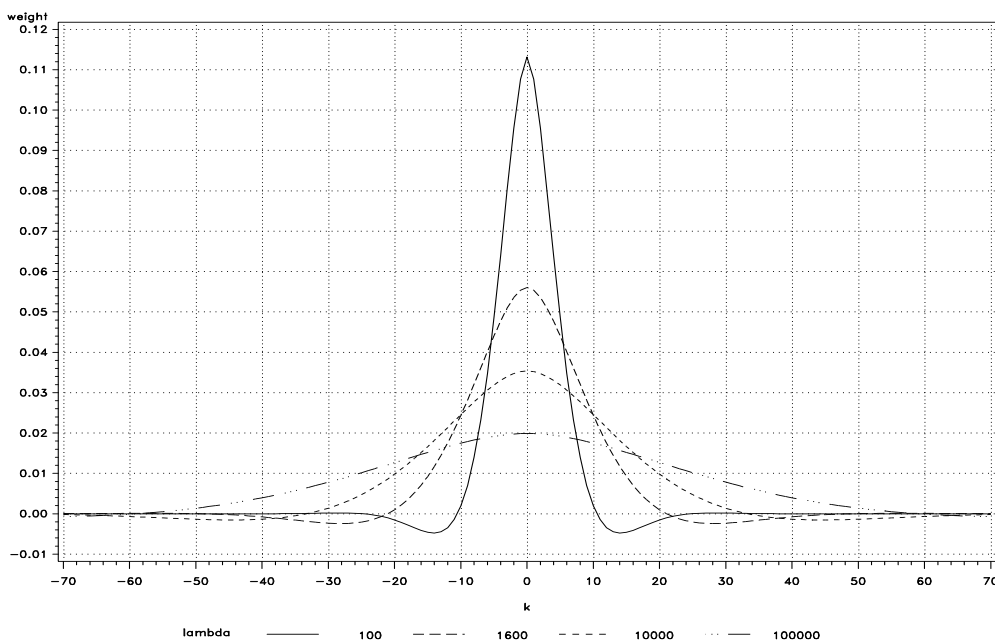
ou encore, tenant compte de la formulation de δ_{-1} obtenue dans le point ci-dessus, on obtient finalement la distribution des poids suivante :

$$\begin{cases} \rho^{-k-1}(\rho - \rho^{-1})(\rho^2 + \rho^{-2} + 6)^{-1} \sin^{-1} \theta [\sin(k-1)\theta - \rho^2 \sin(k+1)\theta] & \text{pour } k \leq 1 \\ \rho^{k+1}(\rho - \rho^{-1})(\rho^2 + \rho^{-2} + 6)^{-1} \sin^{-1} \theta [\sin(k-1)\theta - \rho^{-2} \sin(k+1)\theta] & \text{pour } k \geq 2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que cette fonction de k est paire, confirmant la symétrie de cette moyenne mobile.

3.3.14 Distribution des poids des moyennes mobiles pour différents λ

Lorsque croît le paramètre λ , l'importance de la contrainte de lissage croît elle aussi dans la caractérisation du filtre *HP*. On ne sera dès lors pas étonné d'observer un "évase-ment" de la distribution des poids de la moyenne mobile lorsque λ augmente.



3.4 Périodogramme de la moyenne mobile

Rappelons que les valeurs propres d'un opérateur linéaire invariant $y_k = \mathfrak{L}x_k = \sum_{\ell=-r}^s p_{\ell} x_{k+\ell}$ agissant sur la série chronologique $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}$ sont données par la transformée (éventuellement imaginaire) :

$$E_{\omega} = \sum_{\ell=-r}^s p_{\ell} e^{in\ell\alpha},$$

où la fréquence ω est un paramètre réel continu. Dans ce cas-ci, ces valeurs propres E_{ω} dépendent de l'indice ω et non pas de l'indice k . Le *périodogramme* est alors défini

comme étant la norme au carré de ces valeurs propres $\|E_\omega\|^2$. Notons \mathfrak{M}_0 la moyenne mobile inversant le filtre *HP* (toujours pour une série chronologique infinie) et calculée en y_0 . On sait que

$$\mathfrak{M}_0 x_k = \frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{\ell=-\infty}^1 \delta_{\ell-2}^{(1)} x_\ell + \frac{1}{\delta_{-1}} \sum_{\ell=2}^{\infty} \delta_{\ell-2}^{(3)} x_\ell = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_\ell x_\ell.$$

Dans le cas d'une série infinie, les valeurs propres de l'opérateur \mathfrak{M}_0 résultent alors de la transformée :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p_\ell e^{i\omega\ell} &= \frac{\rho^2 - 1}{(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell-2} [\sin(\ell-1)\theta - \rho^2 \sin(\ell+1)\theta] e^{i\omega\ell} + \\ &+ \frac{1 - \rho^{-2}}{(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta} \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho^{\ell+2} [\sin(\ell-1)\theta - \rho^{-2} \sin(\ell+1)\theta] e^{i\omega\ell}. \end{aligned}$$

Posant $(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta = h$, l'expression est décomposée en quatre séries :

$$\begin{aligned} &\frac{1 - \rho^{-2}}{h} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell} \sin(\ell-1)\theta e^{i\omega\ell} - \frac{\rho^2 - 1}{h} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell} \sin(\ell+1)\theta e^{i\omega\ell} + \\ &+ \frac{\rho^2 - 1}{h} \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho^\ell \sin(\ell-1)\theta e^{i\omega\ell} - \frac{1 - \rho^{-2}}{h} \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho^\ell \sin(\ell+1)\theta e^{i\omega\ell}. \end{aligned}$$

La première des quatre séries ci-dessus devient, recourant, pour une série absolument convergente, à l'identité $\sum_{\ell=q}^{\infty} r^\ell = r^q / (1-r)$,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \rho^{-2}}{h} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell} \sin(\ell-1)\theta e^{i\omega\ell} &= \frac{-i(1 - \rho^{-2})}{2h} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell} (e^{i(\ell-1)\theta} - e^{-i(\ell-1)\theta}) e^{i\omega\ell} \\ &= \frac{-i(1 - \rho^{-2})e^{-i\theta}}{2h} \sum_{\ell=-1}^{\infty} [\rho e^{-i(\theta+\omega)}]^\ell + \frac{i(1 - \rho^{-2})e^{i\theta}}{2h} \sum_{\ell=-1}^{\infty} [\rho e^{i(\theta-\omega)}]^\ell \\ &= \frac{i(\rho^{-3} - \rho^{-1})e^{i\omega}}{2h} \left\{ \frac{1}{1 - \rho e^{-i(\theta+\omega)}} - \frac{1}{1 - \rho e^{i(\theta-\omega)}} \right\}. \end{aligned}$$

De même, pour les trois autres séries, des calculs similaires livrent les résultats :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \rho^2}{h} \sum_{\ell=-\infty}^1 \rho^{-\ell} \sin(\ell+1)\theta e^{i\omega\ell} &= \frac{i(\rho - \rho^{-1})e^{i\omega}}{2h} \left\{ \frac{e^{2i\theta}}{1 - \rho e^{-i(\theta+\omega)}} - \frac{e^{-2i\theta}}{1 - \rho e^{i(\theta-\omega)}} \right\} \\ \frac{\rho^2 - 1}{h} \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho^\ell \sin(\ell-1)\theta e^{i\omega\ell} &= \frac{i(\rho^2 - \rho^4)e^{i2\omega}}{2h} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i(\theta+\omega)}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - \rho e^{i(\omega-\theta)}} \right\} \\ \frac{\rho^{-2} - 1}{h} \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho^\ell \sin(\ell+1)\theta e^{i\omega\ell} &= \frac{i(\rho^2 - 1)e^{i2\omega}}{2h} \left\{ \frac{e^{i3\theta}}{1 - \rho e^{i(\theta+\omega)}} - \frac{e^{-i3\theta}}{1 - \rho e^{i(\omega-\theta)}} \right\}. \end{aligned}$$

Après avoir multiplié chaque dénominateur par son conjugué, on trouve les parties réelle et imaginaire des valeurs propres de l'opérateur \mathfrak{M}_0 :

$$\Re(\omega) = \Re_1 + \Re_2 \quad \text{et} \quad \Im(\omega) = \Im_1 + \Im_2,$$

où \Re_1 , \Re_2 , \Im_1 et \Im_2 sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\Re_1 &= \frac{(\rho^{-3} - \rho^{-1}) [\rho \sin(\theta + 2\omega) - \sin \omega] + (\rho^{-1} - 2\rho + \rho^3) \sin(2\theta + \omega) + (\rho^2 - \rho^4) [\rho \sin \omega - \sin(\theta + 2\omega)]}{2(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta [1 - 2\rho \cos(\omega + \theta) + \rho^2]}, \\ \Re_2 &= \frac{(\rho^{-3} - \rho^{-1}) [\sin \omega - \rho \sin(2\omega - \theta)] + (2\rho - \rho^{-1} - \rho^3) \sin(\omega - 2\theta) + (\rho^2 - \rho^4) [\sin(2\omega - \theta) - \rho \sin \omega]}{2(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta [1 - 2\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2]}, \\ \Im_1 &= \frac{(\rho^{-3} - \rho^{-1}) [\cos \omega - \rho \cos(\theta + 2\omega)] + (2\rho - \rho^{-1} - \rho^3) \cos(2\theta + \omega) + (\rho^2 - \rho^4) [\cos(\theta + 2\omega) - \rho \cos \omega]}{2(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta [1 - 2\rho \cos(\omega + \theta) + \rho^2]}, \\ \Im_2 &= \frac{(\rho^{-3} - \rho^{-1}) [\rho \cos(2\omega - \theta) - \cos \omega] + (\rho^{-1} - 2\rho + \rho^3) \cos(\omega - 2\theta) + (\rho^2 - \rho^4) [\rho \cos \omega - \cos(2\omega - \theta)]}{2(\rho^2 + \rho^{-2} + 6) \sin \theta [1 - 2\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2]}.\end{aligned}$$

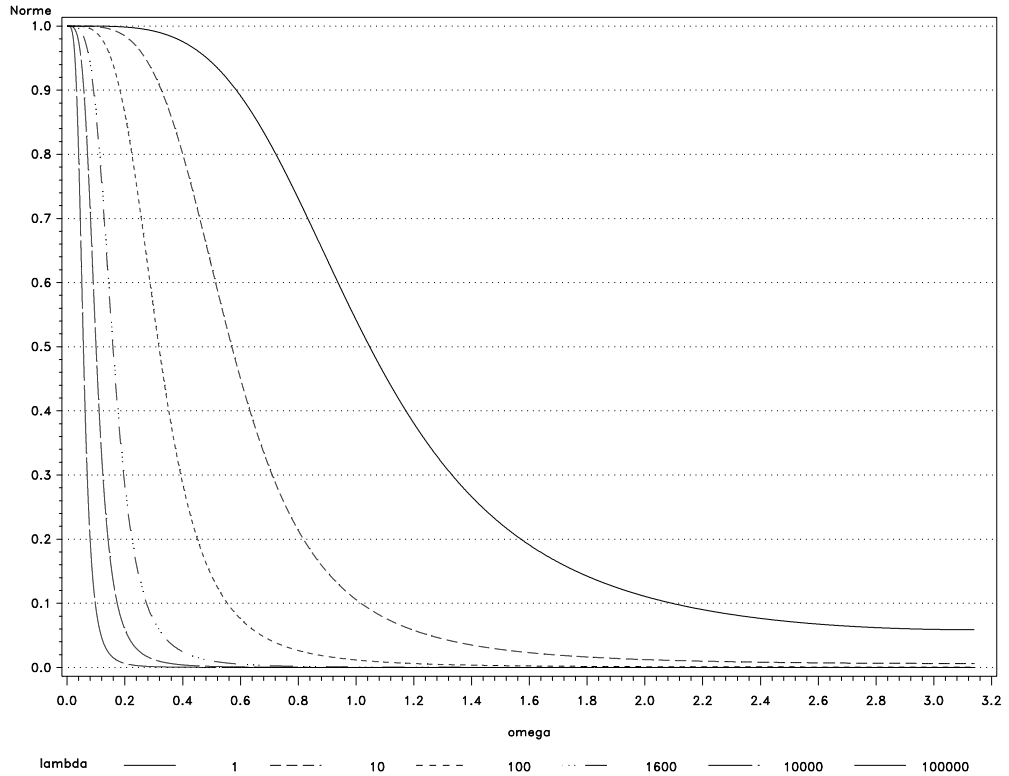
Le périodogramme est alors donné par le carré du module :

$$\|E_\omega\|^2 = [\Re_1(\omega) + \Re_2(\omega)]^2 + [\Im_1(\omega) + \Im_2(\omega)]^2$$

Ci-après, voici un graphique de ce périodogramme pour différentes valeurs de λ . Cette fonction de ω est périodique, de période 2π . Elle prend le maximum 1 en $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$ et admet un axe de symétrie en $\omega = \pi$:

$$\|E_\omega\|^2 = \|E_{2\pi - \omega}\|^2.$$

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, la forme globale du périodogramme est celle d'un U, dont la valeur approche 0 en $\omega = \pi$, ceci quelque soit la valeur du paramètre λ . Ainsi donc, les fréquences les plus basses sont les mieux préservées par cette moyenne mobile.



Tenant compte de la périodicité du périodogramme et de sa symétrie, il suffit de le représenter sur l'intervalle $[0, \pi]$. Lorsque λ augmente, les fréquences les plus élevées sont donc de plus en plus "écrasées". Le déphasage, vu la symétrie de la moyenne mobile, est forcément nul.

3.4.1 Comparaison du périodogramme *HP* avec les périodogrammes de moyennes mobiles classiques

Il est intéressant de comparer ce périodogramme à celui de moyennes mobiles classiques. On considère ici trois moyennes mobiles symétriques :

1] L'opérateur moyenne arithmétique

$$\mathfrak{L}x_k = \begin{cases} \frac{1}{2r+1} \sum_{\ell=-r}^r x_{k+\ell} & \text{pour } -T+r \leq k \leq T-r \\ x_k & \text{pour } |k| > T-r. \end{cases}$$

2] L'opérateur moyenne exponentielle symétrique

$$\mathfrak{L}x_k = \begin{cases} Q^{-1} \sum_{\ell=-r}^r p^{|\ell|} x_{k+\ell} & \text{pour } -T+r \leq k \leq T-r \\ x_k & \text{pour } |k| > T-r. \end{cases}$$

où le paramètre $p \in \mathbb{R}_0^+$ et $p < 1$ et $Q = \sum_{\ell=-r}^r p^{|\ell|} = 2 \sum_{\ell=0}^r p^\ell - 1 = \frac{1+p-2p^{r+1}}{1-p}$.

3] L'opérateur moyenne fractionnaire symétrique

$$\mathfrak{L}x_k = \begin{cases} W^{-1} \sum_{\ell=-r}^r \frac{p-s|\ell|}{q} x_{k+\ell} & \text{pour } -T+r \leq k \leq T-r \\ x_k & \text{pour } |k| > T-r. \end{cases}$$

où les paramètres $p, q, s \in \mathbb{R}_0^+$ et $W = \sum_{\ell=-r}^r (p-s|\ell|)/q$. On calcule

$$W = \sum_{\ell=-r}^r \frac{p-s|\ell|}{q} = -\frac{p}{q} + \frac{2}{q} \sum_{\ell=0}^r (p-s\ell) = \frac{(r+1)(2p-sr) - p}{q}.$$

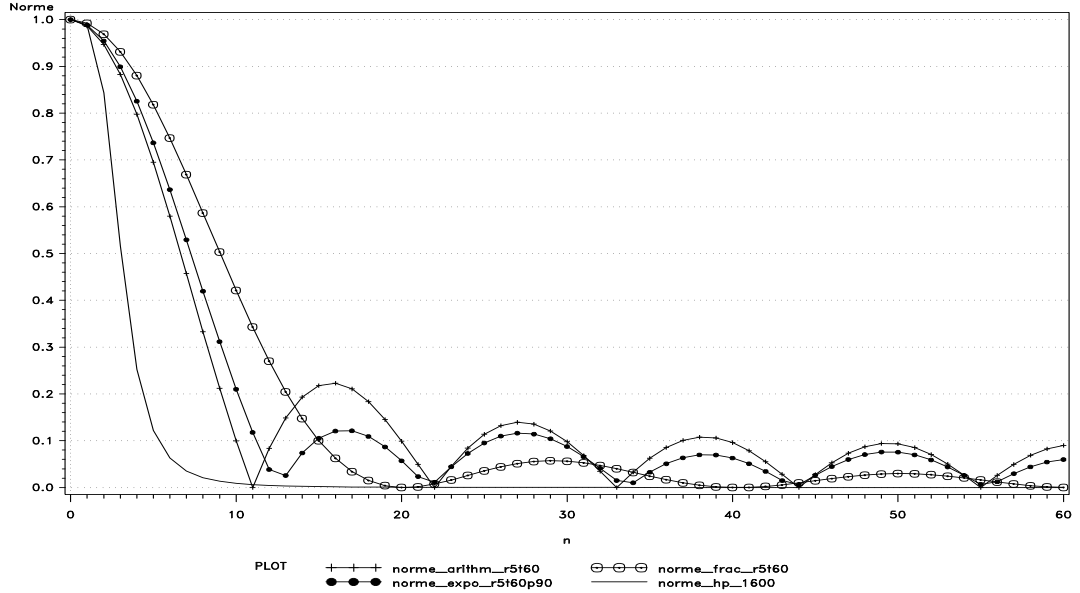
Lorsque $s=1$ et $p=r+1$ et $q=p^2$, on retrouve les poids fractionnaires classiques :

r	p	q	Poids
1	2	4	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
2	3	9	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$
3	4	16	$\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16}$
4	5	25	$\frac{1}{25}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{5}{25}, \frac{4}{25}, \frac{3}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}$
5	6	36	$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$
.

La somme de chacune des suites de poids précédentes valant 1.

Pour l'ensemble des moyennes ici comparées, on a fixé les différents paramètres comme suit : $T = 60, r = 5, p = 90, \lambda = 1600$:

Comparaison NORME valeurs propres de : Moyenne Mobile Sym & Moy Fractionnaire Sym & Moy Exponentielle Sym & HP filter (série de longueur 121)



Ci dessus, on l'indice n correspond à la fréquence $2n\pi/(2T+1)$. Pour des raisons de symétrie, on a considéré les seules valeurs n positives.

4 Le filtre *HP* dans le cas de séries chronologiques finies

4.1 Définition du filtre *HP* dans le cas d'une série finie

Soit \mathcal{S}_T l'ensemble des séries finies paramétrées sur l'ensemble des indices entiers $[-T, T]$. Le filtre $HP(\lambda)$ de paramètre λ est une application de \mathcal{S}_T dans \mathcal{S}_T qui à une série chronologique finie $\mathbf{X}_T \in \mathcal{S}_T$ associe l'*unique* série $\mathbf{Y}_T \in \mathcal{S}_T$ minimisant l'expression suivante :

$$\min_{\mathbf{Y}_T} \mathbf{E} \mathbf{Y}_T = \min_{\mathbf{Y}_T} \left\{ \sum_{k=-T}^T (x_k - y_k)^2 + \lambda \sum_{k=-T+1}^{T-1} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 \right\},$$

où $\lambda \geq 0$ est un paramètre réel. La série \mathbf{Y}_T minimisant l'expression précédente est solution d'un système d'équations que nous allons à présent déterminer.

► Pour $k = -T$, annuler la dérivée partielle $\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T} / \partial y_{-T} = 0$ livre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T}}{\partial y_{-T}} = 0 &= \sum_{k=-T}^T \frac{\partial}{\partial y_{-T}} (x_k - y_k)^2 + \lambda \sum_{k=-T+1}^{T-1} \frac{\partial}{\partial y_{-T}} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 \\ &= -2x_{-T} + 2y_{-T} + \lambda \frac{\partial}{\partial y_{-T}} (y_{-T+2} - 2y_{-T+1} + y_{-T})^2 \\ &\equiv \lambda(y_{-T+2} - 2y_{-T+1} + y_{-T}) + y_{-T} = x_{-T}. \end{aligned}$$

► Pour $k = T$, annuler la dérivée partielle $\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T} / \partial y_T = 0$ livre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T}}{\partial y_T} = 0 &= \sum_{k=-T}^T \frac{\partial}{\partial y_T} (x_k - y_k)^2 + \lambda \sum_{k=-T+1}^{T-1} \frac{\partial}{\partial y_T} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 \\ &= -2x_T + 2y_T + \lambda \frac{\partial}{\partial y_T} (y_T - 2y_{T-1} + y_{T-2})^2 \\ &\equiv \lambda(y_{T-2} - 2y_{T-1} + y_T) + y_T = x_T. \end{aligned}$$

► Pour $k = -T+1$, annuler la dérivée partielle $\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T} / \partial y_{-T+1} = 0$ livre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T}}{\partial y_{-T+1}} = 0 &= \sum_{k=-T}^T \frac{\partial}{\partial y_{-T+1}} (x_k - y_k)^2 + \lambda \sum_{k=-T+1}^{T-1} \frac{\partial}{\partial y_{-T+1}} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 \\ &= -2x_{-T+1} + 2y_{-T+1} \\ &\quad + \lambda \frac{\partial}{\partial y_{-T+1}} [(y_{-T+2} - 2y_{-T+1} + y_{-T})^2 + (y_{-T+3} - 2y_{-T+2} + y_{-T+1})^2] \\ &\equiv \lambda(y_{-T+3} - 4y_{-T+2} + 5y_{-T+1} - 2y_{-T}) + y_{-T+1} = x_{-T+1}. \end{aligned}$$

► Pour $k = T-1$, annuler la dérivée partielle $\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T} / \partial y_{T-1} = 0$ livre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{Y}_T}}{\partial y_{T-1}} = 0 &= \sum_{k=-T}^T \frac{\partial}{\partial y_{T-1}} (x_k - y_k)^2 + \lambda \sum_{k=-T+1}^{T-1} \frac{\partial}{\partial y_{T-1}} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2 \\ &= -2x_{T-1} + 2y_{T-1} \\ &\quad + \lambda \frac{\partial}{\partial y_{T-1}} [(y_T - 2y_{T-1} + y_{T-2})^2 + (y_{T-1} - 2y_{T-2} + y_{T-3})^2] \\ &\equiv \lambda(y_{T-3} - 4y_{T-2} + 5y_{T-1} - 2y_T) + y_{T-1} = x_{T-1}. \end{aligned}$$

► Pour $-T+2 \leq k \leq T-2$, on considère un $k = q$ fixé. L'équation associée à cet indice est alors :

$$\frac{\partial}{\partial y_q} (x_q - y_q)^2 + \lambda \sum_{i=0}^2 \frac{\partial}{\partial y_q} (y_{q+i} - 2y_{q+i-1} + y_{q+i-2})^2 = 0,$$

livrant l'équation aux différences :

$$\lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q = x_q.$$

Résumant, on obtient ainsi le système de $2T+1$ équations aux $2T+1$ inconnues

$\{y_{-T}, \dots, y_T\}$:

$$\begin{cases} \lambda(y_{-T} - 2y_{-T+1} + y_{-T+2}) + y_{-T} = x_{-T} & \text{si } k = -T \\ \lambda(-2y_{-T} + 5y_{-T+1} - 4y_{-T+2} + y_{-T+3}) + y_{-T+1} = x_{-T+1} & \text{si } k = -T+1 \\ \lambda(y_{q-2} - 4y_{q-1} + 6y_q - 4y_{q+1} + y_{q+2}) + y_q = x_q & \text{si } -T+2 \leq k \leq T-2 \\ \lambda(y_{T-3} - 4y_{T-2} + 5y_{T-1} - 2y_T) + y_{T-1} = x_{T-1} & \text{si } k = T-1 \\ \lambda(y_{T-2} - 2y_{T-1} + y_T) + y_T = x_T & \text{si } k = T. \end{cases}$$

4.1.1 Résolution numérique du système d'équations aux différences

Les solutions de ce système ne peuvent raisonnablement s'envisager sous une forme exacte. La résolution numérique de ce système conduit à l'inversion d'une matrice symétrique :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2\lambda & 5\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -4\lambda & 6\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda + 1 & -4\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 5\lambda + 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

matrice de dimensions $(2T+1) \times (2T+1)$. La relation

$$F(y_{-T}, \dots, y_k, \dots, y_T)^t = (x_{-T}, \dots, x_k, \dots, x_T)^t$$

devient

$$(y_{-T}, \dots, y_k, \dots, y_T)^t = F^{-1}(x_{-T}, \dots, x_k, \dots, x_T)^t.$$

Lorsque la série chronologique $\{x_{-T}, \dots, x_k, \dots, x_T\}$ est filtrée par un filtre *HP*, chaque élément x_k de cette série est remplacé par la combinaison linéaire $y_k = \sum_{i=-\ell}^{\ell} p_\ell x_{k+i}$, où les poids p_ℓ correspondent aux valeurs de la $(k+T+1)^{\text{ème}}$ ligne (ou colonne) \mathfrak{M}_k de la matrice inverse F^{-1} symétrique. Autrement dit, le filtre *HP* équivaut à un ensemble de $2T+1$ moyennes $\{\mathfrak{M}_k; k \in [-T, T]\}$, chacune d'entre-elles étant telle que $y_k = \mathfrak{M}_k x_k$ (expression étant ici un produit matriciel).

La somme des éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) de la matrice F vaut 1. Ce que l'on peut exprimer comme suit :

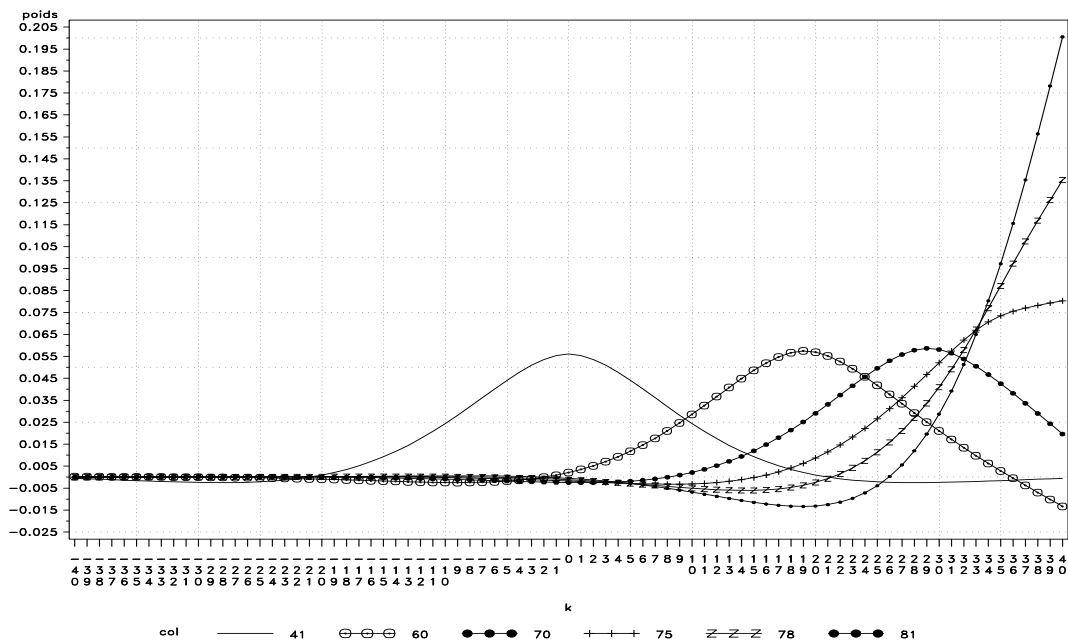
$$F \mathbb{I}_{2T+1} = \mathbb{I}_{2T+1},$$

où la matrice colonne $\mathbb{I}_{2T+1} = (1, 1, \dots, 1)'$ comporte $2T+1$ éléments tous égaux à 1. Ce qui entraîne :

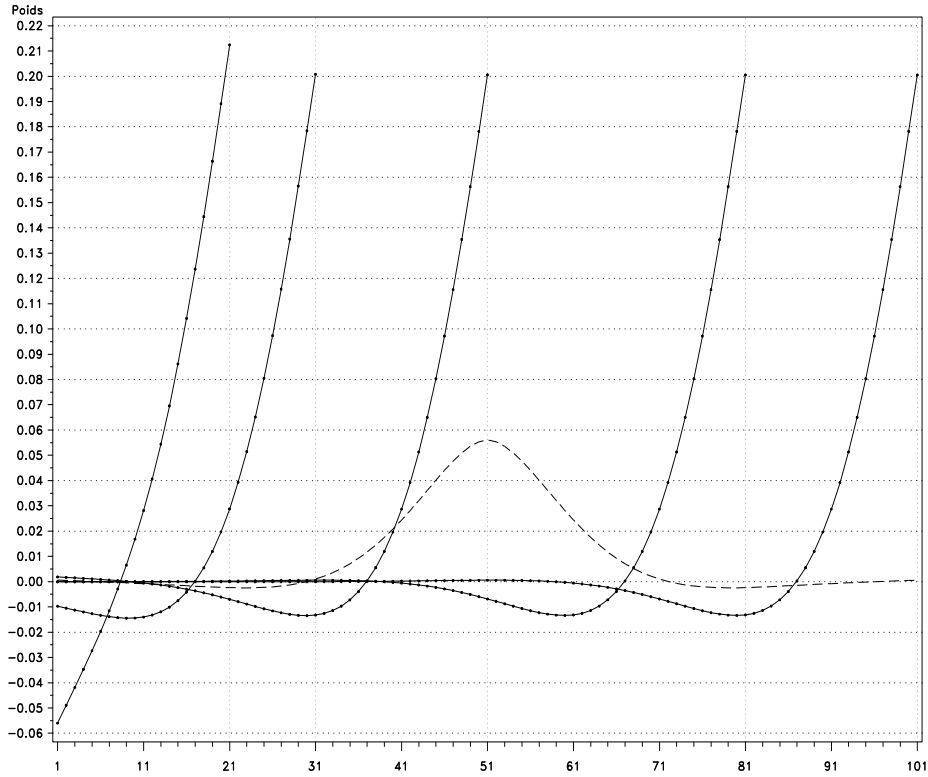
$$\mathbb{I}_{2T+1} = F^{-1} \mathbb{I}_{2T+1}.$$

La somme des éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) de l'inverse F^{-1} vaut donc 1. Ainsi, la somme des poids de chacune des moyennes \mathfrak{M}_k vaut 1.

Dans le graphique ci-après, on donne, pour une série de longueur 81 et pour un $\lambda = 1600$, la répartition des poids des moyennes \mathfrak{M}_{41} , \mathfrak{M}_{60} , \mathfrak{M}_{70} , \mathfrak{M}_{75} , \mathfrak{M}_{78} et \mathfrak{M}_{81} :



Soit x_k un élément de la série initiale $\{x_{-T}, \dots, x_T\}$, tel que l'indice k ne soit pas trop "proche" des extrêmes $-T$ et T . Si la série est "suffisamment longue", on peut s'attendre à ce que les poids de la moyenne mobile \mathfrak{M}_k soient proches de ceux obtenus dans le cas des séries infinies. Considérant une valeur $\lambda = 1600$, des simulations numériques montrent en effet que pour une série comportant environ 80 éléments, les poids attribués à la moyenne 'centrale' \mathfrak{M}_0 sont pratiquement égaux à ceux de la série infinie. Toujours pour $\lambda = 1600$, le graphique ci-après reprend des simulations numériques portant sur des séries de respectivement 11, 13, 15, 17, 19, 21, 31, 41, 51, 81 et 401 éléments. Pour chaque série, apparaissent les poids de la moyenne \mathfrak{M}_0 .



4.2 Périodogramme du filtre *HP* à l'extrémité d'une série finie

Soit une série chronologique $\mathbf{X}_T = \{x_{-T}, \dots, x_k, \dots, x_T\}$ de longueur $2T+1$. On veut étudier ici les propriétés de la moyenne \mathfrak{M}_T obtenue à l'extrémité x_T de cette série, moyenne

$$y_T = \mathfrak{M}_T x_T = \sum_{\ell=-T}^T p_{\ell \cdot T} x_\ell$$

dont les poids $p_{\ell \cdot T}$ correspondent à la dernière ligne (ou colonne) de la matrice inverse F^{-1} . Les valeurs propres de l'opérateur linéaire **non** invariant \mathfrak{M}_T agissant sur l'élément $x_T \in \mathbf{X}_T$ sont données par la transformée :

$$E_n(T) = \sum_{\ell=-T}^T p_{\ell \cdot T} e^{in\ell\alpha}$$

où $\alpha = 2\pi/(2T+1)$. Ces valeurs propres $E_n(T)$ dépendent de l'indice n et de l'indice T . Le *périodogramme* est la fonction $\|E_n(T)\|^2$.

La valeur propre $E_n(T) = \rho_n(T) e^{i\theta_n(T)}$ est un nombre complexe dont l'angle $\theta_n(T) = \arctan(\Im[E_n(T)]/\Re[E_n(T)])$ quantifie le déphasage (en radians) de la série filtrée par

rapport à la série initiale. Autrement dit, si l'élément x_T de la série \mathbf{X}_T vaut

$$x_T = \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T c_n e^{inT\alpha}$$

alors l'élément $y_T = \mathfrak{M}_T x_T$ de la série filtrée par le filtre *HP* vaut :

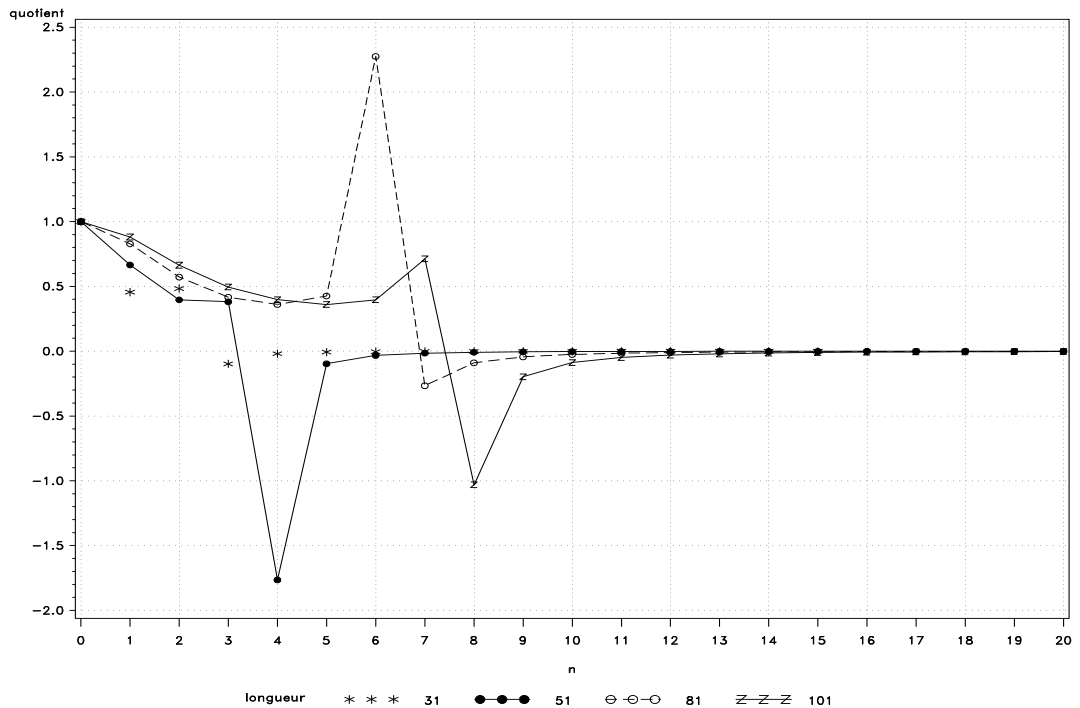
$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T c_n \rho_n(T) e^{i\theta_n(T)} e^{inT\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2T+1}} \sum_{n=-T}^T \rho_n(T) c_n e^{i(nT\alpha + \theta_n(T))} \end{aligned}$$

On trouvera en annexe les périodogrammes (du moins leur racine carrée $\rho_n(T)$) et les déphasages $\theta_n(T)$ de l'opérateur \mathfrak{M}_T , ceci pour les séries de longueur $2T+1 = 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111, 121$ et pour un $\lambda = 1600$. Ces résultats sont repris en annexe dans une table et deux graphiques (les deux premiers).

A présent, pour une série finie $e^{ink\alpha}$ périodique de longueur $2T+1$ – ou du moins sa partie réelle $\cos(nk\alpha)$ –, appartenant à la base $\{\mathbf{B}_T^{(n)}; n \in \{-T, \dots, T\}\}$, on aimerait mesurer le décalage entre la valeur $HP_T[\cos(nT\alpha)]$ obtenue par le filtre *HP* au point extrême $k = T$ de cette série et la valeur $HP_\infty[\cos(nT\alpha)]$ obtenue au même point $k = T$ lorsque la série $\cos(nk\alpha)$ est infinie. Plus précisément, on se propose de mesurer le quotient

$$\frac{\|\mathbf{E}_\omega\| \cos(nT\alpha)}{\rho_n(T) \cos[nT\alpha + \theta_n(T)]},$$

où la norme $\|\mathbf{E}_\omega\|$ est celle obtenue dans l'étude des séries infinies. Le calcul de ces quotients est illustré ci-après pour les séries de longueur 31, 51 et 81 :



Ces différents résultats montrent que :

- 1.- Les périodogrammes et les déphasages (radians) de l'opérateur \mathfrak{M}_T sont fonction non seulement du paramètre de lissage λ , mais aussi de la longueur $2T+1$ de la série.
- 2.- Les fréquences les plus basses sont les mieux préservées – voire amplifiées – par l'opérateur \mathfrak{M}_T .
- 3.- Les fréquences les plus basses sont les moins déphasées. Cependant, le déphasage de ces fréquences les plus basses est loin d'être négligeable.
- 4.- Globalement, on constate que le quotient $\|E_\omega\| \cos(nT\alpha) / \rho_n(T) \cos[nT\alpha + \theta_n(T)]$ est plus élevé pour les fréquences les plus basses, quotient pouvant atteindre 2 ou 0.5, voire pire !

5 Conclusion

Le recours à la théorie des *équations aux différences discrètes* permet d'inverser le filtre *HP*, ceci pour les séries infinies. Cette inversion débouche sur une analyse asymptotique précise de l'impact de ce filtre – d'un point de vue fréquentiel – sur les séries chronologiques.

Pour les séries finies, on observe d'importants déphasages pour les éléments de la série situés à proximité des extrémités. Un point important tient au fait que ces déphasages dépendent de la longueur de la série et des fréquences (cycles) composants

cette série. Ce dernier point entraîne des distorsions au niveau de la série filtrée. Ces distorsions sont loin d'être négligeables. Pour les fréquences les plus basses, l'erreur commise par le filtre *HP* peut dépasser 100%. Autrement dit, pour les fréquences les plus courantes dans les séries d'origine socio-économique.

Ce travail est évidemment à poursuivre...

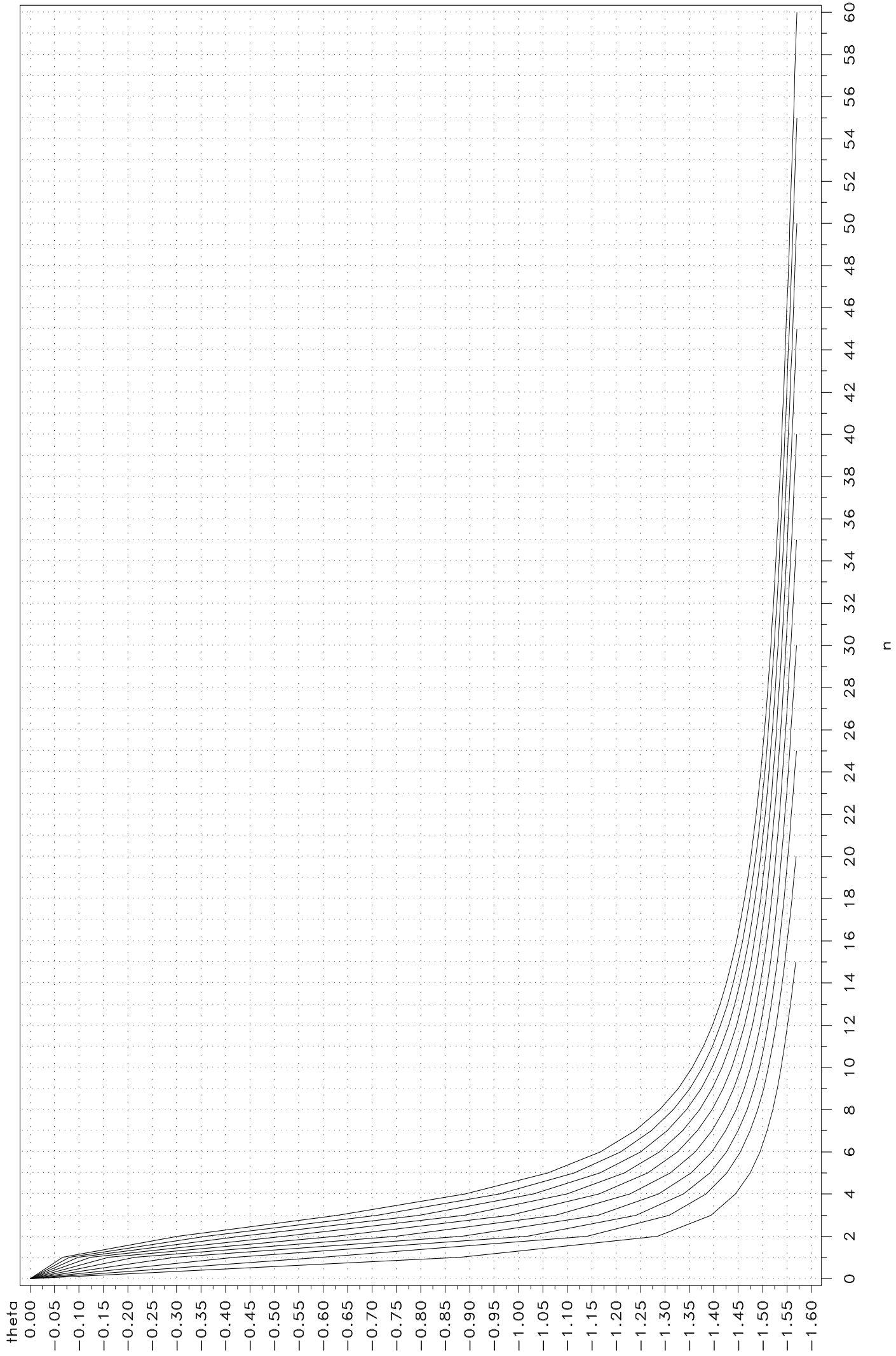
6 Références

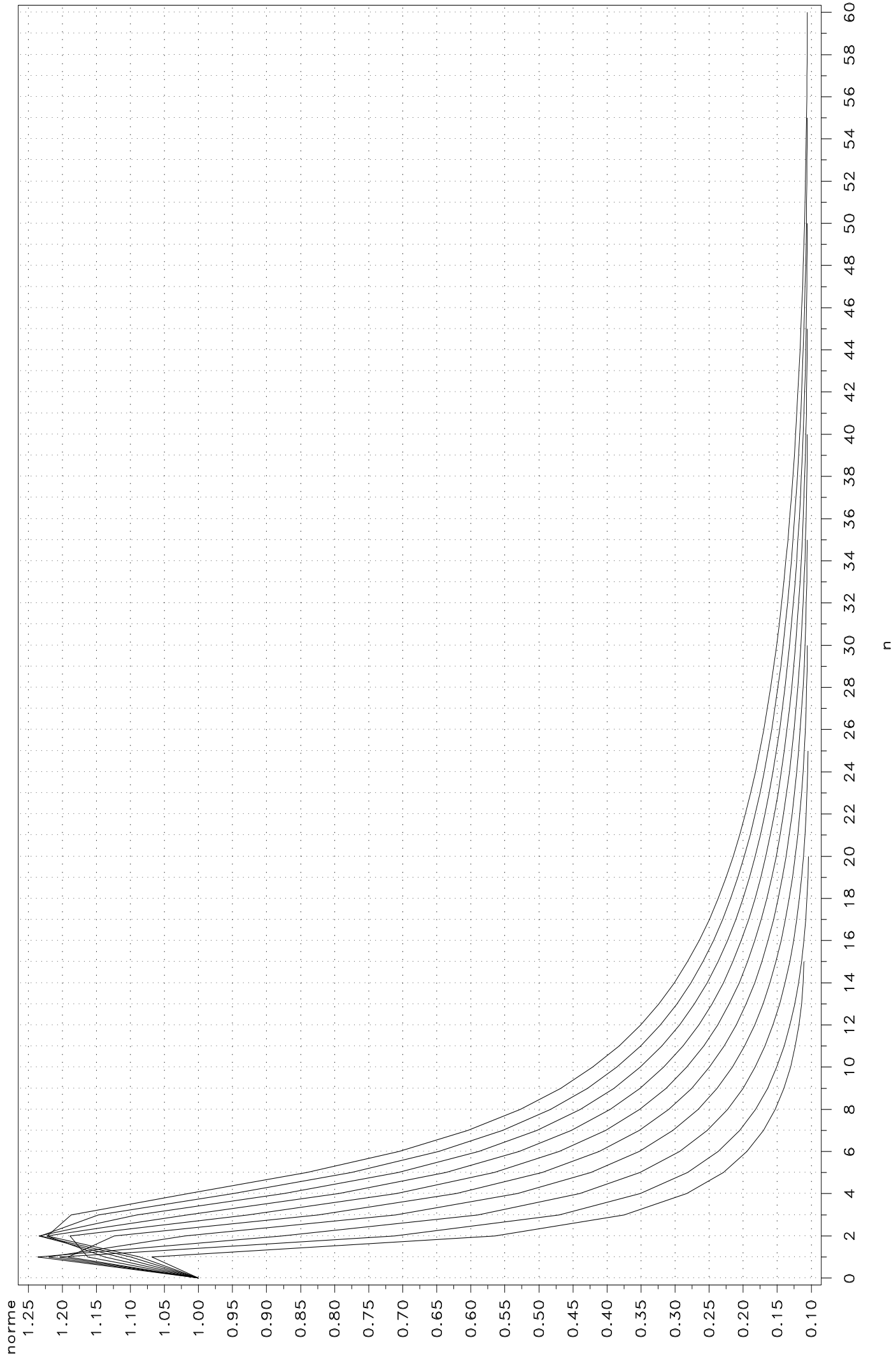
- Anderson T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley.
- Brockwell P.J., Davis R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*, second edition, Springer-Verlag.
- Gourieroux C., Monfort A. (1995). *Séries temporelles et modèles dynamiques*, 2^e édition, Economica.
- Hamilton J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton.
- Hylleberg S. (ed.) (1992). *Modelling Seasonality*, Oxford University Press.
- Planas C. (1997). *The Analysis of Seasonality in Economic Statistics : A Survey of Recent Developments*, EUROSTAT.
- Priestley M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press.
- Saber N. Elaydi (1996). *An Introduction to Difference Equations*, 2nd edition, Springer-Verlag.

7 Annexes

Dans les annexes qui suivent, pour un $\lambda = 1600$, on trouvera les graphiques suivants :

- 1.- La valeur des déphasages (en radian) pour les séries de longueur $2T + 1 = 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111$ et 121 , ceci en fonction de l'indice $n \in \{0, \dots, T\}$, indice correspondant à la fréquence $n\alpha = 2n\pi/(2T + 1)$.
- 2.- Les normes – non mises au carré – des valeurs propres, ceci pour les mêmes paramètres décrits au point précédent.
- 3.- Une table résumant les normes $\rho_n(T)$ et les déphasages $\theta_n(T)$, pour $n = 1, 2, \dots, 60$ et $2T + 1 = 31, 41, 51, \dots, 121$.





v	$N_{.31}$	$\theta_{.31}$	$N_{.41}$	$\theta_{.41}$	$N_{.51}$	$\theta_{.51}$	$N_{.61}$	$\theta_{.61}$	$N_{.71}$	$\theta_{.71}$	$N_{.81}$	$\theta_{.81}$	$N_{.91}$	$\theta_{.91}$	$N_{.101}$	$\theta_{.101}$	$N_{.111}$	$\theta_{.111}$	$N_{.121}$	
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1.0682	-0.8812	1.2036	-0.5980	1.2358	-0.4192	1.2200	-0.2967	1.1915	-0.2149	1.1627	-0.1607	1.1375	-0.1241	1.1166	-0.0987	1.0997	-0.0804	1.0859	-0.0680
2	0.5645	-1.2847	0.7120	-1.1405	0.8777	-1.0173	1.0199	-0.8843	1.1236	-0.7493	1.1889	-0.6257	1.2227	-0.5195	1.2342	-0.4314	1.2320	-0.3597	1.2220	-0.2917
3	0.3751	-1.3942	0.4701	-1.3089	0.5898	-1.2407	0.7108	-1.1631	0.8242	-1.0751	0.9272	-0.9824	1.0169	-0.8888	1.0905	-0.7972	1.1470	-0.7101	1.1872	-0.6388
4	0.2830	-1.4447	0.3513	-1.3840	0.4398	-1.3380	0.5315	-1.2867	0.6212	-1.2282	0.7088	-1.1651	0.7938	-1.0992	0.8743	-1.0309	0.9486	-0.9612	1.0148	-0.8912
5	0.2292	-1.4744	0.2819	-1.4267	0.3514	-1.3918	0.4238	-1.3537	0.4951	-1.3107	0.5660	-1.2647	0.6368	-1.2165	0.7069	-1.1662	0.7754	-1.1139	0.8412	-0.8112
6	0.1944	-1.4944	0.2366	-1.4547	0.2936	-1.4262	0.3530	-1.3956	0.4116	-1.3616	0.4701	-1.3257	0.5291	-1.2884	0.5884	-1.2496	0.6474	-1.2091	0.7058	-0.6758
7	0.1703	-1.5091	0.2050	-1.4747	0.2530	-1.4502	0.3032	-1.4246	0.3527	-1.3963	0.4023	-1.3668	0.4524	-1.3364	0.5029	-1.3050	0.5537	-1.2725	0.6044	-0.5744
8	0.1529	-1.5205	0.1819	-1.4899	0.2231	-1.4682	0.2664	-1.4458	0.3092	-1.4216	0.3520	-1.3904	0.3953	-1.3707	0.4391	-1.3445	0.4833	-1.3173	0.5276	-0.5466
9	0.1401	-1.5299	0.1643	-1.5020	0.2002	-1.4822	0.2382	-1.4622	0.2757	-1.4408	0.3133	-1.4188	0.3514	-1.3966	0.3900	-1.3739	0.4289	-1.3507	0.4680	-0.5210
10	0.1305	-1.5379	0.1506	-1.5120	0.1822	-1.4936	0.2159	-1.4754	0.2493	-1.4561	0.2827	-1.4395	0.3167	-1.4168	0.3510	-1.3968	0.3857	-1.3764	0.4207	-0.4937
11	0.1233	-1.5450	0.1398	-1.5204	0.1678	-1.4862	0.1979	-1.4862	0.2279	-1.4686	0.2580	-1.4508	0.2885	-1.4331	0.3194	-1.4152	0.3507	-1.3970	0.3822	-0.4682
12	0.1181	-1.5513	0.1312	-1.5277	0.1561	-1.5111	0.1832	-1.4953	0.2103	-1.4790	0.2376	-1.4627	0.2653	-1.4465	0.2934	-1.4302	0.3218	-1.4138	0.3505	-0.4438
13	0.1143	-1.5572	0.1243	-1.5343	0.1464	-1.5031	0.1709	-1.4879	0.2204	-1.4728	0.2276	-1.4628	0.2458	-1.4478	0.2715	-1.4429	0.2975	-1.4279	0.3238	-0.4209
14	0.1120	-1.5627	0.1187	-1.5401	0.1383	-1.5243	0.1606	-1.4956	0.2059	-1.4814	0.2059	-1.4814	0.2292	-1.4675	0.2529	-1.4537	0.2769	-1.4398	0.3011	-0.4011
15	0.1108	-1.5681	0.1143	-1.5455	0.1316	-1.5298	0.1519	-1.5160	0.1725	-1.5024	0.1935	-1.4890	0.2150	-1.4759	0.2369	-1.4630	0.2591	-1.4501	0.2815	-0.3815
16	0.1098	-1.5706	0.1108	-1.5506	0.1260	-1.5349	0.1444	-1.5214	0.1633	-1.5084	0.1828	-1.4957	0.2027	-1.4833	0.2231	-1.4711	0.2437	-1.4590	0.2646	-0.3646
17	0.1091	-1.5727	0.1081	-1.5553	0.1212	-1.5408	0.1379	-1.5263	0.1554	-1.5138	0.1734	-1.5016	0.1920	-1.4899	0.2109	-1.4784	0.2302	-1.4669	0.2497	-0.3497
18	0.1087	-1.5744	0.1062	-1.5599	0.1173	-1.5438	0.1324	-1.5308	0.1485	-1.5187	0.1652	-1.5070	0.1825	-1.4958	0.2002	-1.4848	0.2183	-1.4740	0.2366	-0.3326
19	0.1084	-1.5763	0.1049	-1.5643	0.1140	-1.5479	0.1276	-1.5350	0.1424	-1.5231	0.1580	-1.5119	0.1741	-1.5011	0.1908	-1.4906	0.2077	-1.4803	0.2249	-0.3179
20	0.1081	-1.5781	0.1043	-1.5686	0.1113	-1.5517	0.1235	-1.5389	0.1371	-1.5272	0.1516	-1.5163	0.1667	-1.5059	0.1823	-1.4959	0.1983	-1.4860	0.2145	-0.3024
21	0.1078	-1.5799	0.1037	-1.5727	0.1091	-1.5554	0.1199	-1.5425	0.1324	-1.5311	0.1459	-1.5204	0.1600	-1.5104	0.1747	-1.5007	0.1898	-1.4912	0.2051	-0.2871
22	0.1075	-1.5814	0.1031	-1.5763	0.1067	-1.5589	0.1169	-1.5459	0.1283	-1.5346	0.1408	-1.5243	0.1541	-1.5145	0.1679	-1.5051	0.1822	-1.4960	0.1967	-0.2722
23	0.1072	-1.5829	0.1026	-1.5806	0.1062	-1.5624	0.1142	-1.5492	0.1246	-1.5378	0.1362	-1.5278	0.1487	-1.5183	0.1618	-1.5092	0.1753	-1.5004	0.1890	-0.2573
24	0.1069	-1.5844	0.1021	-1.5849	0.1054	-1.5658	0.1120	-1.5523	0.1214	-1.5412	0.1322	-1.5311	0.1439	-1.5218	0.1562	-1.5130	0.1690	-1.5044	0.1821	-0.2424
25	0.1066	-1.5859	0.1016	-1.5893	0.1050	-1.5691	0.1102	-1.5553	0.1186	-1.5442	0.1286	-1.5343	0.1395	-1.5251	0.1512	-1.5082	0.1633	-1.5044	0.1757	-0.2275
26	0.1063	-1.5874	0.1011	-1.5938	0.1087	-1.5731	0.1087	-1.5583	0.1161	-1.5471	0.1253	-1.5372	0.1356	-1.5283	0.1466	-1.5198	0.1581	-1.5117	0.1699	-0.2126
27	0.1060	-1.5893	0.1077	-1.5977	0.1075	-1.5769	0.1075	-1.5611	0.1140	-1.5498	0.1224	-1.5401	0.1320	-1.5312	0.1424	-1.5229	0.1533	-1.5150	0.1646	-0.1977
28	0.1057	-1.5912	0.1067	-1.6016	0.1067	-1.5806	0.1067	-1.5639	0.1121	-1.5525	0.1198	-1.5428	0.1288	-1.5340	0.1386	-1.5259	0.1490	-1.5181	0.1597	-0.1828
29	0.1054	-1.5931	0.1061	-1.6059	0.1061	-1.5849	0.1061	-1.5667	0.1105	-1.5551	0.1175	-1.5454	0.1258	-1.5367	0.1351	-1.5287	0.1449	-1.5211	0.1552	-0.1679
30	0.1051	-1.5950	0.1056	-1.6098	0.1056	-1.5893	0.1056	-1.5694	0.1092	-1.5576	0.1154	-1.5479	0.1232	-1.5389	0.1319	-1.5313	0.1413	-1.5238	0.1510	-0.1529
31	0.1048	-1.5969	0.1051	-1.6141	0.1081	-1.5938	0.1081	-1.5731	0.1081	-1.5601	0.1136	-1.5503	0.1208	-1.5417	0.1290	-1.5338	0.1379	-1.5265	0.1436	-0.1380
32	0.1045	-1.6000	0.1073	-1.6077	0.1073	-1.5977	0.1073	-1.5825	0.1073	-1.5625	0.1120	-1.5526	0.1186	-1.5440	0.1263	-1.5362	0.1347	-1.5290	0.1436	-0.1231
33	0.1042	-1.6029	0.1066	-1.6116	0.1066	-1.6077	0.1066	-1.5869	0.1066	-1.5649	0.1106	-1.5549	0.1166	-1.5463	0.1239	-1.5386	0.1318	-1.5314	0.1403	-0.1082
34	0.1039	-1.6058	0.1062	-1.6155	0.1062	-1.6116	0.1062	-1.5912	0.1062	-1.5673	0.1094	-1.5571	0.1149	-1.5485	0.1216	-1.5408	0.1292	-1.5337	0.1372	-0.0933
35	0.1036	-1.6087	0.1060	-1.6194	0.1060	-1.6155	0.1060	-1.5951	0.1060	-1.5696	0.1084	-1.5593	0.1133	-1.5506	0.1196	-1.5429	0.1267	-1.5359	0.1344	-0.0784
36	0.1033	-1.6116	0.1076	-1.6233	0.1076	-1.6194	0.1076	-1.6000	0.1076	-1.5731	0.1076	-1.5614	0.1119	-1.5527	0.1177	-1.5450	0.1244	-1.5458	0.1230	-0.0635
37	0.1030	-1.6145	0.1069	-1.6272	0.1069	-1.6233	0.1069	-1.6039	0.1069	-1.5769	0.1069	-1.5635	0.1110	-1.5547	0.1160	-1.5470	0.1224	-1.5470	0.1230	-0.0486
38	0.1027	-1.6174	0.1064	-1.6311	0.1064	-1.6272	0.1064	-1.6078	0.1064	-1.5806	0.1064	-1.5656	0.1096	-1.5567	0.1145	-1.5490	0.1204	-1.5420	0.1270	-0.0337
39	0.1024	-1.6203	0.1061	-1.6350	0.1061	-1.6311	0.1061	-1.6116	0.1061	-1.5844	0.1061	-1.5677	0.1086	-1.5587	0.1131	-1.5509	0.1187	-1.5440	0.1249	-0.0188
40	0.1021	-1.6232	0.1060	-1.6389	0.1060	-1.6350	0.1060	-1.6155	0.1060	-1.5882	0.1060	-1.5698	0.1078	-1.5606	0.1118	-1.5528	0.1170	-1.5458	0.1230	-0.0039
41	0.1018	-1.6261	0.1072	-1.6428	0.1072	-1.6389	0.1072	-1.6194	0.1072	-1.5912	0.1072	-1.5682	0.1119	-1.5577	0.1107	-1.5546	0.1155	-1.5477	0.1212	0.0110
42	0.1015	-1.6290	0.1067	-1.6467	0.1067	-1.6428	0.1067	-1.6233	0.1067	-1.5949	0.1067	-1.5663	0.1110	-1.5564	0.1097	-1.5526	0.1142	-1.5494	0.1195	0.0261
43	0.1012	-1.6319	0.1063	-1.6506	0.1063	-1.6467	0.1063	-1.6272	0.1063	-1.6000	0.1063	-1.5682	0.1106	-1.5547	0.1089	-1.5506	0.1129	-1.5512	0.1179	0.0412
44	0.1009	-1.6348	0.1060	-1.6545	0.1060	-1.6506	0.1060	-1.6311	0.1060	-1.6039	0.1060	-1.5698	0.1106	-1.5527	0.1081	-1.5485	0.1118	-1.5529	0.1165	0.0563
45	0.1006	-1.6377	0.1059	-1.6584	0.1059	-1.6545	0.1059	-1.6350	0.1059	-1.6078	0.1059	-1.5698	0.1105	-1.5506	0.1075	-1.5466	0.1108	-1.5545	0.1151	0.0714
46	0.1003	-1.6406	0.1069	-1.6623	0.1069	-1.6584	0.1069	-1.6389	0.1069	-1.6116	0.1069	-1.5698	0.1105	-1.5485	0.1069	-1.5445	0.1109	-1.5561	0.1139	0.0865
47	0.1000	-1.6435	0.1065	-1.6662	0.1065	-1.6623	0.1065	-1.6428	0.1065	-1.6155	0.1065	-1.5698	0.1105	-1.5464	0.1065	-1.5424	0.1109	-1.5578	0.1128	0.1016
48	0.0997	-1.6464	0.1062	-1.6701	0.1062	-1.6662	0.1062	-1.6467	0.1062	-1.6194	0.1062	-1.5698	0.1105	-1.5443	0.1062	-1.5403	0.1109	-1.5593	0.1118	0.1167
49	0.0994	-1.6493	0.1061	-1.6740	0.1061	-1.6701	0.1061	-1.6506	0.1061	-1.6233	0.1061	-1.5698	0.1105	-1.5422	0.1061	-1.5382	0.1109	-1.5609	0.1108	0.1318
50	0.0991	-1.6522	0.1060	-1.6779	0.1060	-1.6740	0.1060	-1.6545	0.1060	-1.6272	0.1060	-1.5698	0.1105	-1.5401	0.1060	-1.5361	0.1109	-1.5625	0.1100	0.1469
51	0.0988	-1.6551	0.1060	-1.6818	0.1060	-1.6779	0.1060	-1.6584	0.1060	-1.6311	0.1060	-1.5698	0.1105	-1.5380	0.1059	-1.5340	0.1109	-1.5640	0.1092	0.1620
52	0.0985	-1.6580	0.1060	-1.6857	0.1060	-1.6818	0.1060	-												

